[illegible]

[illegible]

Towary zregeſtrowane *in Tres Claſſes* rozdzielić. Taxę onych ſprawiedliwą bez depaktacyi Kupca y detrymentu Skarbu ułożyć y wyprowadzić, Kwit Kupcowi *in forma debita* napiſać, y tenże ſam tak w Regeſtra Piſarſkie iako y Rewizorſkie z wyrażeniem Gatunkow Towarow y ſpecyfikacyą Solucyi od nich wpiſać. Perceptę odebrać, y tę w ſkrzynię ſkarbową w raz z Panem Piſarzem włożyć y zamknąć. Jeżeliby ſię z Rewizyi y konſkrypcyi Towarow co więcey nad Regeſtr, y Auſzczug Kupiecki, lub dobrowolne opowiedzenie pokazało, to *irremiſſibiliter* Konfiſkacyi podlegać powinno, ktorą takową Konfiſkatę Rewizor w Regeſtra ſwoie Rewizorſkie pod Expedycyą ma *annotare*. Na dokończeniu zaś Kwartału powinien Rewizor na Ultymę Regeſtra ſwoie Rewizorſkie odeſłać, na ktorą to Ultymę raz Piſarz, a drugi raz Rewizor iezdzić ma...

GEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH.

CZĘSC II.

Cena oprawney w papier Zł. 1 *i* gr. 3 *ſre:*

w Drukarni Nadworney J.K. Mci
Roku 1781.

Dzieło: *Geometrya*, ułożone przez J.P. Lhuilier Obywatela Genewenſkiego, w Towarzyſtwo Nauk w tymże Mieście uſtanowione policzonego, ktòre za ogłoſzonym w Polſzcze, i obcych kraiach Uczonych do piſania wezwaniem, z pomiędzy innych, potwierdzenie i nadgrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Kſiąg Elementarnych rozſtrząśnione, a przez J. X. Gawrońſkiego Kanonika Koadjutora KrakowſkiegoLektora J.K. Mci i w tymże Towarzyſtwie zaſiadaiącego, na Polſki język z Francuſkiego przełożone, Szkołom Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiemy. w Warſzawie dnia 30. Października Roku 1780.

JGNACY Xżę MASSALSKI Biſkup Wil. Prezy:
MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI Biſkup Płocki.
AUGUST Xżę SUŁKOWSKI Wwda Kaliſki.
JĘDRZEY MOKRONOSKI Wwda Mazow:
JACEK: MAŁACHOWSKI Podkan: Koro:
JOACHYM CHREPTOWICZ Podkan: W.X.L.
MICHAŁ MNISZECH Marſzałek Nadwor: Lit.
JGNACY POTOCKI Piſarz W.W.X.L.
ADAM Xżę CZARTORYSKI Gene: Ziem. Pod:
STANISŁAW XżęPONIATOWSKI Ge: Lieut. W.K.
FRANCISZEK BIELINSKI Stta Czerſki
ANDRZEY ZAMOYSKI Kaw: Or. Orła Biał:



ZBIOR RZECZY ZAWARTYCH W ROZDZIAŁACH TEY CZĘSCI GEOMETRYI.

ZBIOR SŁOW POLSKICH,

Albo nowych, albo mniey znanych, użytych w tey Części Geometryi, z przydanemi obok słowami Łacińskiemi, toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi.

Biegòn. *Polus*
Bryła. *Solidum.*
Bryłowatość. *Soliditas.*
Bytność. *Existentia.*
Ciągło. *Continuè.*
Ciągły. *Continuus.*
Czworokątny. *Quadrangularis.*
Czworościan. *Tetraedrum.*
Dwòdzielny. *Subduplicatus*
Dwòmnożny. *Duplicatus.*
Dwòmnożyć. *Duplicare.*
Dwódziestościan. *Icosàëdrum.*
Dwónastościan. *Dodecàëdrum*
Graniastostup. *Prisma*
Jednoimienny. *Ejusdem nominis*
Kąt płaski. *Angulus planus*
Kąt bryłowy. *Angulus solidus.*
Kloc. *Truncus*

Krawędz

Krawędź. *Arrête* (po Francufku.)
Krzywy. *Curvus.*
Kula *Sphera.*
Kulifty. *Sphæricus.*
Nadmiar. *Excessus.*
Ośmiościan. *Octoëdrum.*
Oftroftup albo Oftrogran. *Pyramis.*
Oftrokrąg. *Conus*
Oftrokrąg ścięty. *Conus truncatus*
Płaszczyzna *Planum.*
Początkowy. *Elementaris.*
Pòłkole. *Semicirculus.*
Pòłkula. *Hemisphærium.*
Przecięcie. *Sectio.*
Rodzenie fię. *Generatio*
Ròwnik. *Æquator.*
Ròwnoległoboczny. *Parallelogrammicus*
Równoległościan. *Parallelogrammum*
Rózległość. *Extensio*
Sciana. *Paries*
Spodek. *Pes*
Stały. *Constans*
Sześcian. *Hexdèdrum*
albo *Cubus*
Tròykątny. *Triangularis*
Tròymnożny. *Triplicatus*
Walec. *Cylinder*
Warfta. *Stratum*
Wielościan. *Polyedrum*
Wyczerpanie. *Exhaustio*
Wymiar. *Dimensio*
Wyrocznia. *Oraculum*

Prze-

Przestroga. Na Tablicy VI. Fig. 3. opuszczone są litery, p, q, które wpisać należy na końcach linii nayblizszey równoodległey od linii PQ.

OMYŁKI DO POPRAWIENIA

Karta.	*Wiersz.*	*Stoi.*	*Popraw.*
18	3	(BD. (AC.	AC, BD.
27	-	*Fig.* 2.	*Fig.* 3.
57	19	be. -	bc.
59	20	Dost: -	Dostyczney
	22	Dost.	Dostawy
79	5	$1\frac{1}{3}$ -	- $3\frac{1}{3}$.
100	przedostatni wiersz cały		zmazać.
108	5	GE. -	GF.
-	7	GF. -	GH.
-	25	Równoległobokow	Równoległoboku.
120	- 24	z ich -	ich.
133	1	Które y -	którey.
155	- 17	abc -	aby
175	22	powierzchni	na powierzchni
188	- 7	ściętego -	całego.
197	- 12	pośrodka -	od środka
215	- 11	utworzony	utworzona
218	- 26	iaki -	iak i
225	6	C : b.	B: b.
236	5	do powierzchni	do powierzchni podstawy

CZĘSC



CZĘSC DRUGA

O Bryłach.

WSTĘP,

W Części pierwſzey ſamemi tylko zatrudnialiśmy ſię liniiami i powierzchniami; lubo iakażkolwiek *rozległość* (extenſio) będzie rzeczy iakiey, nie ieſt ona ani ſamą liniią, ani ſamą powierzchnią, ale ſię rozciąga wzdłuż, w ſzerz i wgłąb. I tak, pokòy naprzykład, ma ſwoię długość, ma ſzerekość, i wyſokość, czyli grubość. Tarcica, choćby naycieńſza, ma także długość, ſzerokość i grubość. Nie byłoby powierzchni, tey tarcicy, to ieſt: nie byłoby rozległości iey, uważaney co do długości tylko, i ſzerokości, gdyby nie było

tarcicy uważaney co do wſzyſtkich iey wymiarów. Powierzchnia ogranicza rozległość, i onę kończy; aby zaś granica iakiey rozległości była w ſamey rzeczy, trzeba ażeby i ta rozległość była. Nie byłoby więc powierzchni, gdyby nie było rozległości, którą kończy; tak iak (mowiąc przez podobieńſtwo lubo dalekie) nie byłoby koloru naprzykład w ſuknie, gdyby nie było ſukna.

Podobnym ſpoſobem, lubo często nie uważaliśmy tylko długość iakiey rozległości (cośmy nazywali linią) niemaſz iednak tey długości, ieżeli niemaſz powierzchni, którą ona kończy, lub na którey może być w rzeczy ſamey ciągnioną. Nie będzie więc długości, gdy nie będzie powierzchni; a że nie będzie powierzchni, ieżeli nie będzie rozległości maiącey trzy wymiary; więc i linii nie będzie, tylko tam, gdzie ieſt rozległość, z trzema wymiarami.

Gdy ſię kto bawi około rozległości, ile ta trzy wymiary w ſobie zamyka, w takim razie mowi ſię, iż ſię bawi około *Ciała* (Corpus) albo *Bryły* (Solidum.)

Geome-

Geometrya nieuważa inaczey Ciała, tylko ile to rozciągnione ieſt w zdłuż, w ſzerz, i wzwyż albo w głąb; innemi zaś właſnościami iego cale ſię nie zatrudnia, zoſtawuiąc ie do uważania Fizykom. Lubo zaś zdaie ſię, iż ſobie ściśle nader w uważaniu ciała założyli granice Geometrowie, maią iednak obſzerne i tak pole dochodzenia wielu bardzo prawd [illegible] których wiadomość po więkſzey części koniecznie ieſt potrzebna chcącemu w Fizyce poſiąpić.

Nie ſami tylko Geometrowie, uważaiąc ciała, iednę ſobie w nich właſność, to ieſt rozległość za cel wyſtawuią. Jeſt to, a przynaymniey być powinien, powſzechny poſtępowania ſpoſob, że gdy kto rzecz iaką z gruntu chcé poznać, i poiąć; po części nayprzod iey właſności uważa, a dopiero łączy ie razem, i dokładnieyſzey o rzeczy całey nabywa wiadomości. Rozum ludzki nadto ieſt ograniczony, aby wiele poſpołem nieznanych ieſzcze własności mogł dochodzić, a tym bardziey ie ogarnąć.

Skutek takowego właſności rzeczy z oſobna dochodzenia, tym więkſzey ieſt wagi, im więcey rzeczom też wła-

ſność ſłużyć będzie ; a taką własnością ieſt rozległość. Cokolwiek pod zmyſły naſze podpada i podpadać może, wſzyſtko to ieſt rozległym ; cokolwiek więc odkryie tym ſposobem Geometra, może to do wſzyſtkich rzeczy przyſtoſować, które tylko pod zmyſły naſze podpadaią, lub im poddane być mogą. A ztąd ſię okazuie ważność w wynalazkach Geometrycznych, i obfitość w przyſtoſowaniu onychże.

Lubo maiąc wzgląd na ſłabość poięcia ludzkiego, iednę tylko własność ciała uważa Geometra, dla większey iednak wygody i tę ieſzcze dzieli nieiako na części, i w myśli ie oſobno ſtawia, chociaż w rzeczy ſamey oſobno ſię nie znayduią. Nie ma względu rolnik na grubość ziemi w tym mieyſcu, gdzie rolą ſwoię uprawia. Dosyć mu na tym, że ta grubość ieſt doſtateczna do przyięcia ziarna, do doſtarczania ſoku i do rozwinienia ſię tegoż ziarna. Wielkość pola znać oſobliwiey ſtara ſię, aby wiedział, ile na nim ziarna poſiać może, a zatym powierzchnią ſwego pola, bez względu na grubość ziemi uważa. Tak i piſzący, miarkuie wielkość powierzchni papieru, końcem zmieſzczenia na nim tego,

co

co ma pifać: nie wchodząc w iego grubość, i dosyć maiąc na tym, że mu atramentu nie przebiia.

Jakożkolwiek mała będzie grubość ciała iakiego, wſzelako iednak, ciało to, dwie ſtrony odmienne, przeciwne ſobie mieć muſi, i iedna z nich odłączyć ſię w rzeczy ſamey może od drugiey. luboby nie znalazło ſię ſposobne narzędzie do uczynienia tego rozłączenia. Ciało więc chociaż naycieńſze, nie może być za iedno brane, co powierzchnia; a zatym nie prawdziwie rzecz wykładaią nie którzy Geometrowie. gdy mowią: że ciało albo bryła ſkłada ſię z powierzchni, położonych iednych na drugich; bo iakażkolwiek byłaby liczba tych warſt, z których ciało złożone uważamy, każda iednak wſzczegulności ta warſta byłaby bryłą, a nie powierzchnią, ponieważ miałaby dwie ſtrony przeciwne, i mogące ſię od ſiebie odłączyć.

Co ſię zaś powiedziało o powierzchniach, to i o liniiach, twierdzić należy: że nie dla tego ſą od Geometrów uważane, iakoby w rzeczy ſamey znaydowały ſię, ale tylko dla łatwości i wygo-

dy. Nie wiele w to wchodzi podróżny, iak szeroka iest droga, którą ma przebyć, dosyć mu na tym, iż się nią udać może. Liczba kroków, które ma czynić nie zawisła od szerokości, ale od samey długości tey drogi; tę przeto długość szczegulniey uważa.

Niechby była bardzo mała szerokość powierzchni iakiey, naprzykład Równoległoboku, i niechby ta sama tak mała szerokość podzielona była na iak náywięcey części, przez linie równoodległe od długości, wszelako każda z tych części będzie powierzchnią, i chociażby iak naymnieysza była odległość dwóch liniy, które tę szczupłą powierzchnią kończą, za iedne iednak linią wziąść ich nie można; a ztąd łatwo każdy widzi, iako to wyrażenie iest niedokładne a bardziey iescze fałszywe; że powierzchnia składa się z liniy położonych iednych przy drugich.

Nakoniec zdarzaią się przypadki, gdzie nie potrzeba nawet uważać przeciągu całey linii, ale koniec iey tylko ieden, lub obadwa, albo zgoła to, co dzieli dwie iey części. W takim razie mówi się, że Geometra samym się zatru-

trudnia *punktem*. Punktu w ſamey iſtocie niemaſz, ieżeli niemaſz linii, którą punkt kończy, albo iey części, które oddziela. Podróżny cel ſwoiey drogi, iak punkt iaki ſobie wyſtawia, wielkością iego cale ſię nie zaprzątaiąc, aż poki do niego nie doydzie, doſzedłſzy, uważa dopiero obſzerność mieyſca, do którego dążył. Niemaſz wierzchołka kąta, ieżeli nie będzie dwóch liniy ten kąt czyniących. Uwagi nad ktòremi ſię zaſtanawia Geometra czyli to, co do położenia punktòw iednych względem drugich, czyli względem linii iakiey, pochodzą z ſamego wyſtawienia ſobie w myśli tych rzeczy w iſtocie ſię nie znayduiących, dla łatwieyſzego doyścia tego, czego ſzuka.

Jakożkolwiek mała będzie rozległość względem zmyſłòw naſzych, lub względem wielkości ciał, ktòre nam nayczęściey pod zmyſły podpadaią: wſzelako można oddalić myślą tę małość względem innych więkſzych rzeczy, i uważać ciało choćby też naymnieyſze, iak gdyby wielkim bardzo było, a to względem tyſiączney naprzykład części ſwoiey.

Niech będzie iak naymnieyſza liniia. tey linii koniec ieden, zawſze różnić ſię

bę-

będzie od drugiego. J znowu niechby kto na iak naywięcey części podzielił iaką linią, każda z tych części dwa końce odmienne mieć będzie, a ztąd poznać można, iak nie prawdziwe iest to wyrażenie; że linija składa się z punktów przy sobie położonych.

Wystawuiąc sobie Geometra pod temi różnemi postaciami rozległość, uprzedzać tym samym zdaie się te trudności, które często zwykły bywać zarzucane o prawdziwey *bytności* (existentia) tych rzeczy, które są celem iego nauki.

Powierzchnia płaska, iest powierzchnią, na którey ku wszystkim stronom linije proste prowadzić można: i takiemi to liniiami i powierzchniami dotąd zatrudnialiśmy się, których wszystkie części na teyże samey *Płaszczyznie* zostaią (in eodem Plano). W części następuiącey takie nadto linije i powierzchnie zabawić nas będą, które na odmiennych płaszczyznach znayduią się.

Z dwoiakiemi liniiami mieliśmy ieszcze do czynienia, z prostemi i z kołowemi, lub ich częściami. Powierzchnie także, około których bawiliśmy się,

były albo zakończone liniiami proftemi, albo liniią kołową, albo liniiami proftemi, i częściami liniy kołowych. W części naftępuiącey będziemy nadto zabawiać fię różnemi powierzchniami *krzywemi* (curva) które wyftawić fobie można iak gdyby początek miały z obrotu powierzchni płafkich, które iużeśmy roftrząfali. Obaczemy to w fzczegulności, gdy o każdey takiey powierzchni mowa będzie.

Co fię zaś tycze *Bryt*; te dwoiakiego gatunku zabawiać nas będą; iedne, które fą zakończone powierzchniami płafkiemi, drugie, które fię kończą powierzchniami krzywemi albo częścią krzywemi, częścią płafkiemi.

Geometrya więc, ieft to nauka, która fię zabawia famą rozległością.

Liniie profte dwoiakośmy uważali, raz co do ich wielkości, drugi raz co do ich położenia iednych względem drugich. W pierwfzym względzie przyrównywaliśmy iedne do drugich, albo profto zaraz, albo przez fpolną im miarę, do którey ftofowaliśmy każdą z ofobna liniią. W drugim względzie, albo liniie

z fobą

z sobą się spotykały, i ztąd początek kątòw, i ich podziałòw; albo się też nie spotykały.

Nauczyliśmy się dawać linii iedney względem drugiey iakiekolwiek do upodobania położenie: to iest robić kąt iakikolwiek dany, lub pociągnąć równoodległą od linii daney. Wyznaczyliśmy mieysce wierzchołków, kątów iakichkolwiek danych, których ramiona przechodzą przez dwa punkta dane, i wiele ztąd użytecznych używań wywiedliśmy. Nie mogąc zaś dokładnie wyznaczyć stosunku okrągu koła do linii prostey, przybliżyliśmy iak naybardziey stosunek ten do prawdziwego. Widzieliśmy oraz, że porównanie okręgów iednych do drugich, nie zawisło od porównania okręgu z liniią.

Co do powierzchni; przytoczyliśmy nayprzód przypadki, w których dwie figury mogą przystać do siebię. Widzieliśmy, że to przystawanie zawisło iedynie od wielkości i położenia liniy iednych względem drugich, to iest, że tylko takie dwie figury przystać mogą do siebie, w których boki iednakowey są wielkości iedne względem drugich, i

iedna-

iednakowego położenia. Jednym z nayznamienitszych przystosowań było przeniesienie, czyli przerysowanie iakieykolwiek figury prostokreślney. Widzieliśmy także, iż wielkość figur prostokreślnych nie zawisła od wielkości i położenia ich boków, gdyż Troykąty, lub Równoległoboki, byleby iednakowe miały podstawy, i wysokości, są równe; równe też będą, tak dwa naprzykład Troykąty, iako i dwa Równoległoboki, gdy ich podstawy będą w stosunku odwrótnym ich wysokości; Nadto równość w wielkości figur nie tylko nie zawisła od wielkości i położenia boków, ale nawet ani od ich liczby; ponieważ Tróykąt, Równoległobok, i kwadrat może być tak zrobiony, że się równać będzie iakieykolwiek figurze daney prostokreślney; może ieszcze zrównany być z summą lub różnicą figur innych prostokreślnych.

Można też przez przybliżenie porównać koło z figurą iaką prostokreślną, i zrysować takie koło, któreby mało co różniło się od iedney lub więcey figur prostokreśnych; dokładnie zaś można mieć koło równe innemu danemu, lub wielu innym kołom także danym.

Lubo

Lubo wielkość figury nie ieſt tym ſamym wyznaczona, że wyznaczony ieſt iey obwód i położenie boków; podany iednak mieliśmy ſpoſób ieden z naywygodnieyſzych, wykryślenia figury proſtokreślney o ilukolwiek bokach danych, maiąc dany iey obwód, widzieliśmy oraz granice, w których przy nie powiękſzonym obwodzie, powierzchnia figury być może powiękſzona; lubo zmnieyſzenia iey nie ma żadnych granic.

Z podobieńſtwa położenia liniy, które kończą figurę, i z proporcyonalności tychże liniy wynikało wiele twierdzeń, a z tych znowu wiele wniosków, i przyſtoſowań. Szczegulniey zaś wynikało, przenieſienie na papier, działań na ziemi częſtokroć nierówney odprawionych; które to przenieſienie dokładnieyſzym i łatwieyſzym ieſzcze ſtawało ſię, używſzy rachunku.

W tym wſzyſtkim, co ſię dotąd mówiło, nie wſpomniało ſię tylko o linii proſtey, i o linii kołowey, o powierzchniach płaſkich zakończonych przez liniie proſte, albo przez liniie kołowe, lub ich części; o bryłach obwiedzionych powierzchniami płaſkiemi, albo krzy-

wemi, maiącemi ſwoy początek od powierzchni płaſkich. Ta część Geometryi, nazywa ſię *Geometryą początkową* (Geometria Elementaris) ſłużу ona za fundament koniecznie potrzebny do innych części zawilſzych, z których ſię ſkłada *Geometrya wyżſza*; (Geometria ſublimis), a w tey rzecz ieſt o rozmaitych innych liniiach krzywych, o powierzchniach przez nie zakończonych i o wielu bardzo takich bryłach, których początek czaſem można, a czaſem nie można wyprowadzić z tych oſtatnich liniy krzywych, lub z powierzchni niemi zakończonych.

Różni ſię też Geometrya początkowa od wyżſzey, i co do ſpoſobu ryſowania figur do niey należących; w Geometryi albowiem początkowey, doſyć ieſt na cerklu i linii do wykreślenia figur iey właſnych; każde przeto zagadnienie, które z pomocą tych dwóch tylko narzędziów może być rozwiązane, do niey należy. Jeżeli zaś zagadnienie, mogąc być rozwiązanym, z pomocą ſamey linii i cerkla, to ieſt przez ſame boki i łuki koła, rozwięzuie ſię z użyciem innych ieſzcze narzędziów, albo liniy krzywych, odmiennych od koła, o tako-

takowym rozwiązaniu mówić się zwykło, iż nie iest wykonane sposobem zadosyć czyniącym.

ROZDZIAŁ I.

O położeniu tak Liniy iako i Płaszczyzn iednych względem drugich.

1. TWierdz: 1. Gdy liniia ma dwa swoie punkta, na iedney płaszczyznie, ma ie oraz i wszystkie na teyże płaszczyznie.

Dowodz: Liniia prosta wyznacza się przez dwa punkta; a zatym liniia prosta poprowadzona przez dwa punkta dane, na daney także płaszczyznie zniydzie się z każdą inną prostą, przez też dwa punkta poprowadzoną, i iednę z nią liniią uczyni.

2. *Twierdz.* Przez liniią prostą i punkt gdziekolwiek dany, może zawsze przechodzić iedna płaszczyzna.

Dowodz Wystawmy sobie myślą, iż przez tę liniią przechodzi iakakolwiek płaszczyzna; niechay ta płaszczyzna obraca

braca ſię około teyże linii, w tym obrocie przeydzie przez punkt dany, a w przechodzeniu będzie tą ſamą płaſzczyzną, którey ſzukamy.

Można także i przez dwie liniie przecinaiące ſię (a) przeprowadzić płaſzczyznę; ponieważ płaſzczyzna przechodząca przez iednę z tych liniy i przez którykolwiek punkt drugiey, przechodzi razem i przez przecięcie tych dwóch liniy, i przez punkt należący do drugiey linii, a zatym i druga ta liniia cała ieſt na teyże płaſzczyznie.

Można nakoniec i przez trzy boki Tróykąta przeprowadzić płaſzczyznę. Jakoż płaſzczyzna przechodząca przez dwa boki Tróykąta, przechodzi też i przez dwa punkta, w których trzeci bok przecia

(a) *Dwie przecinaiące ſię, bo wiele ieſt liniy, których położenie ieſt takie, że przez nie nie może razem przechodzić iedna płaſzczyzna; na przykład u koſtce od grania, tak ieſt położone ramię iedno kąta na iedney ſtronie, i bok przeciwny drugiemu ramieniu tegoż kąta na inney ſtronie, że przez te dwie linie iedna płaszczyzna przechodzić nie może.*

cina tamte dwa, a zatym i ten trzeci bok na teyże ieſt płaſzczyznie.

3. *Twierdz.* 3. Gdy ſię dwie płaſzczyzny przecinaią, tym ſpólnym ich przecięciem, ieſt liniia proſta.

Dowodz. Weźmy na tym ſpólnym przecięciu dwa iakiekolwiek punkta, i poprowadźmy przez nie, na iedney z dwóch płaſzczyznie, liniią proſtą; ta liniia będzie miała na drugiey płaſzczyznie dwa punkta do ſiebie należące, więc i cała będzie na teyże drugiey płaſzczyznie; a zatym będzie cała na obydwóch płaszczyznach, to ieſt będzie ſpolnym ich przecięciem.

To co ſię o płaſzczyznach powiedziało, można porównać z tym, co ſię linii tycze; to ieſt: liniia proſta wyznacza ſię przez dwa punkta, płaſzczyzna wyznacza ſię przez trzy punkta lub przez dwie liniie przecinaiące ſię. Gdy znowu dwie liniie wzaiem ſię przecinaią, punkt ſpólnym ich ieſt przecięciem; gdy zaś przecinaią ſię dwie płaſzczyzny, ſpolnym ich przecięciem ieſt liniia proſta.

4. *Twierdz.* 4. Gdy liniia proſta do dwóch innych, które ſię przecinaią na

iedney

iedney płaszczyznie, prostopadłą iest w punkcie ich przecięcia, bedzie też prostopadłą i do każdey inney linii, przechodzącey przez ten punkt na teyże płaszczyznie.

Można to nayprzod obiaśnić na karcie przełamaney. Liniia prosta, podług którey karta się przełamała, prostopadłą iest do boków, części dwóch, tey karty przełamaney. Obracaiąc część iednę złamaną, około złamania, czyli spólnego przecięcia, bok ieden z dwóch, do którego liniia przecięcia była prostopadłą, odmieniać będzie położenie, wszelako iednak, na iedney zostanie płaszczyznie, i liniia przecięcia zawsze do niego będzie prostopadła. Ten przykład prawdę tę zmysłom dosyć ukazuie, nie dosyć iednak ukazuie ią rozumowi.

Dowodz. Niech bedą dwie liniie proste, AB, CD, przecinaiace się w P, i niech do obydwóch prostopadłą będzie liniia SP. Na płaszczyznie przechodzącey przez te dwie liniie, przeciągnąwszy przez punkt P. iakąkolwiek liniią EF, do tey linii będzie też prostopadłą liniia SP. *Tab. I. Fig. 1.*

 Weźmy

Weźmy linie równe: PA, PB, i znowu PC, PD, także równe. Poprowadźmy BD ſpotykaiące linią EF, w punktach AC, E, i F.

Poniewaz Tróykąty: APC, BPD, maią dwa boki równe iedne względem drugich, i kąty między temi bokami zawarte, także równe, więc mogą przyſtać do ſiebie; a w ſzczegulności kąt PAC, równy ieſt kątowi PBD. Przeto i Tróykąty APE, BPF iako maiące równe boki: PA, PB, i kąty równe iedne względem drugich, mogą też do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności, równe ſą w nich boki PE, PF, i AE, BF.

Pociągniymy ieſzcze linie SA, SB, SC, SD; Tróykąty proſtokątne SPA, SPB, maią bok ſpolny SP, i boki PA, PB, równe: a zatym mogą do ſiebie przyſtać, a w ſzczegulności linie SA, SB, ſą równe. Podobnie równe ſą i linie SC, SD. Dwa więc Tróykąty CSA, BSD, których boki wſzyſtkie równe ſą iedne względem drugich, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzezegulnoćci kąty SAC, SBD ſą równe.

Poprowadziwſzy SE, SF; Tróykąty: SAE, SBF maią boki SA, AE, równe wzglę-

względem boków SB, BF. i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc mogą do siebie przystać; a wszczegulności równe są liniie, SE, SF.

Więc w Tróykątach SPE, SPF, równe są boki w iednym, względem boków drugiego, azatym i te przystać mogą do siebie; a wszczegulności kąt SPE, równa się kątowi SPF; a że są kątami przyległemi, czynią razem dwa kąty proste; każdy z nich przeto będzie kątem prostym; a zatym liniia SP, będzie też prostopadłą i do linii EF.

To Twiedzenie bardziey w dowodzeniu długie niż trudne, powinno być obiaśnionym przez figurę z papieru grubszego, lub z drewna, i z nici; lub w inny sposob. Toż rozumieć trzeba i względem wszystkich prawie podań, w tey części zawartych.

5. *Defin:* Gdy liniia prostopadłą iest do wszystkich innych, które się w punkcie iey spadku przecinaią na płaszczyznie iakiey, o takiey linii mówi się, że iest prostopadłą do tey płaszczyzny; a zatym ieżeli liniia prostopadłą iest do

dwóch innych w punkcie ich przecięcia, na płaszczyznie, ta liniia prostopadłą iest i do tey płaszczyzny.

6. *Twierdz:* 5. *Wzaiemnie*, ieżeli liniia, prostopadłą iest do trzech innych liniy, które się w iednym iey puncie przecinaią; płaszczyzna ta, która przechodzi przez dwie z tych trzech linii przechodzi też i przez trzecią.

Tab. I. Fig. 1, Niech będzie lini a SP. prostopadłą do linii PB, PD, PF, które przechodzą przez tenże sam punkt P, linii SP.

Niechay płaszczyzna iaka przechodzi przez liniią SP, i PF. Jakażkolwiek będzie liniia, w którey ta płaszczyzna, przecina drugą płaszczyznę przechodzącą przez linie PB, i PD, wszelako liniia SP będzie prostopadłą do tego spolnego przecięcia, a zatym gdyby liniia PF, nie była tym spólnym przecięciem, tedy liniia SP, byłaby prostopadłą do dwóch linii leżących na teyże co i ona płaszczyznie, to iest: byłaby prostopadłą do linii PF, i do drugiey ieszcze linii różney od PF, przecinaiącey spolnie dwie płaszczyzny; co być nie może. Liniia więc PF. nie iest różna od spolnego przecięcia dwóch płaszczyzn SPF, BPD, a zatym iest tym

spol-



ſpolnym przecięciem, i przeto należy i do drugiey płaſzczyzny BPD; to ieſt ta płaſzczyzna BPD przechodząca przez linii PB, PD, przechodzi też i przez linią PF.

7. *Twierdz:* 6. Dwie linii proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, ſą od ſiebie równoodległe.

Tab. I.

Fig. 2.

Niech będą dwie linie BA, CD proſtopadłe do iedney płaſzczyzny, na którą ſpadaią w punktach B, i C, te dwie linii ſą równoodległe.

Poprowadzmy linią BC, a od końca C ſpolnego linii BC, z linią DC, proſtopadłą do płaſzczyzny, wyciągniymy na tey płaſzczyznie proſtopadłą CE, do BC, równą iakieykolwiek długości BA, wziętey na drugiey linii proſtopadłey do teyże płaſzczyzny. Poprowadźmy ieſzcze i linii BE, AE. Dwa Tróykąty ABC, ECB, maią ſpólny bok BC, boki także BA, CE, równe, z wykryślenia, i kąty proſte: ABC, BCE; więc te Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności linii BE, AC, ſą równe. Dwa tedy Tróykąty ABE, ECA maią względem ſiebie równe wſzyſtkie boki,

aza-

a zatym przyſtać mogą do ſiebie; a w ſzczegulności równe ſą kąty ABE, ACE; że zaś liniia AB, proſtopadłą ieſt do linii BE, (ponieważ wzieliśmy ią za proſtopadłą do płaſzczyzny przechodzącey przez linije BC, BE) więc kąt ACE, ieſt też proſty; a zatym liniia EC proſtopadła do dwóch liniy CB, CD, z wykryślenia, ieſt też proſtopadłą i do linii CA. Przeto ta liniia CA ieſt na tey ſamey płaſzczyznie, co i liniie BC, CD. Aże płaſzczyzna przechodząca przez liniie AC, CB, przechodzi też i przez linią AB, więc linie AB, CD, ſą na iedney płaſzczyznie; będąc zaś na iedney płaſzczyznie, że ſą proſtopadłemi do linii BC, więc od ſiebie równoodległemi będą.

Przeſtroga Aby łatwiey zrozumieć to dowodzenie, dobrze będzie przegiąć Figurę 2, w linii BC; tak, aby część iedna ABCD tey Figury, przypadała proſto nad drugą częścią BEC. Podobnie dopomagać można łatwieyſzemu wyobrażeniu i w innych Figurach, gdzie nie iedna zachodzi płaſzczyzna.

Uwaga W pierwſzey części cokolwiek ſię mówiło o liniiach równoodległych, zawſze to było w tym rozumieniu, że te liniie kreślone były, na tey

ſamey

ſamey płaſzczyznie, na ktòrey i każda inna liniia łącząca dwa ich punkta, leżała.

8, *Twiedz*: 7. Jeżeli dwie liniie ſą od ſiebie równoodległemi, a iedna z nich proſtopadłą ieſt do iakiey płaſzczyzny, będzie i druga do teyże płaſzczyzny proſtopadłą.

Weźmy dwie liniie BA, CD za równoodległe; eżeli iedna z nich nap: CD, ieſt proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, będzie do teyże płaſzyzny proſtopadłą i druga BA. *Tab. I. Fig. 2*

Na płaſzczyznie, do którey wzieliśmy za proſtopadłą, CD, pociągniymy CB; będą do CB, proſtopadłemi obiedwie linie AB, i CD. Na teyże płaſzczyznie niech będzie CE proſtopadłą do BC, i równą długości BA. Poprowadźmy ieſzcze AC, AE, BE. Całe dowodzenie na tym zawiſło, aby okazać, że kąt ABE ieſt proſtym, to ieſt, że liniia AB proſtopadła do linii BC, ieſt razem proſtopadłą i do linii BE, leżącey na tey ſamey płaſzczyznie, do którey liniia CD ieſt proſtopadłą.

Dwa Tróykąty proſtokątne ABC, ECB. maią ramiona kąta proſtego równe iedne

dne względem drugich ; a zatym te dwa Tróykąty mogą przyſtać do ſiebie, a w ſzczegulności liniie AC, BE, ſą równe. Maią tedy dwa Tróykąty ABE, ECA, wſzyſtkie trzy boki równe iedne względem drugich, i mogą zatym przyſtać do ſiebie; a w ſzczegulności równe ſą kąty ABE, ACE, Płaſzczyzna przechodząca przez dwie liniie równoodległe AB, CD, przechodzi też tak przez liniią BC, iako i przez AC, więc liniie DC, BC, AC, na iedney płaſzczyznie leżą. A że liniia CE ieſt proſtopadłą do dwóch linii CD, BC; będzie też proſtopadłą i do trzeciey linii CA ; a zatym kąt ACE ieſt proſtym ; a że ten kąt, ieſt równy kątowi ABE, więc i kąt ABE, ieſt proſtym.

Tab. I. 9. *Zagad:* Spuścić proſtopadłą do płaſzczyzny, z punktu nie na niey danego.

Fig. 3. Niech będzie taki punkt S, z którego ſpuścić trzeba proſtopadłą na daną płaſzczyznę.

Rozwiązanie. Na płaſzczyznie daney nakreślmy iakąkolwiek liniią AB. Niech przez tę liniią i przez punkt dany S, przechodzi inna płaſzyzna, na którey pociągniy-

ciągniymy SD, proſtopadłą do AB. Na daney płaſzczyznie niech też będzie poprowadzona DP, proſtopadła do AB; a przez liniie SD, DP, niech przechodzi płaſzczyzna, na którey niech będzie SP proſtopadłą do linii DP; ta liniia SP będzie razem proſtopadłą, którey ſzukaliśmy.

Wykreślenie ſłużące do dowodzenia. Niech przez P, przechodzi liniia EF, równoodległa od AB.

Dowodz: Liniie SD, PD, z wykreślenia ſą proſtopadłe do linii AB; więc liniia DB, wzaiemnie ieſt do obydwóch tych liniy proſtopadłą; a zatym proſtopadłą ieſt i do płaſzczyzny przechodzącey, przez te dwie liniie. A że liniia EF równoodległą ieſt od linii AB, więc liniia EF ieſt też proſtopadłą do teyże płaſzczyzny SDP; a wſzczególności proſtopadłą ieſt do linii SP; i liniia SP, ieſt wzaiemnie do linii EF proſtopadłą. Że zaś liniia SP zrobiona była proſtopadłą do linii PD, więc liniia SP ieſt razem proſtopadłą do linii EF, i PD, które ſię przy iey ſpadku P, przecinaią na daney płaſzczyznie, a zatym liniia SP, proſtopadłą ieſt do teyże płaſzczyzny.

10.

10. *Zagadn:* 2. Od punktu danego na płaszczyznie wynieść proſtopadłą do teyże płaſzczyzny.

Rozwiąz: Spuśćmy do płaſzczyzny daney z punktu iakiegokolwiek nie na niey będącego, proſtopadłą, a przez punkt dany poprowadźmy równoodległą od teyże proſtopadłey.

11. *Uwaga* 1. Od punktu danego, iedną tylko prowadzić można proſtopadłą, do płaſzczyzny.

12. *Uwaga.* 2. Gdy liniia iaka nie ieſt ani na ſamey płaſzczyznie, ani do niey proſtopadłą; może być albo od niey równoodległą, albo tak, iak zechcemy do niey nachyloną.

Nayprzod. Jeżeli, ſpuściwſzy z dwóch punktów linii iakiey, dwie proſtopadłe na płaſzczyznę, te proſtopadłe będą ſobie równe; tedy ta liniia od którey ſą ſpuſzczone, będzie równoodległa od płaſzczyzny, na którą ie ſpuściliśmy, to ieſt: nie ſpotka nigdzie tey płaſzczyzny, choćby tak liniia, iako i płaſzczyzna naydaley były przedłużone.

Powtóre

Powtore. Niech będzie liniia SD. nie proftopadłą do płafzczyzny; ale niech fpotyka płafzczyznę w punkcie naprz: D. Z punktu któregokolwiek tey linii naprz: z S, fpuśćmy do tey płafzczyzny proftopadłą natrafiaiącą na nię w punkcie P, i poprowadźmy PD. Kąt SDP, nazywa fię kątem *pochyłości* (angulus inclinationis) tey liniy SD, do płafzczyzny. *Tab. I. Fig. 2.*

Ten kąt ieft naymnieyfzym z tych wfzyftkich, które czynić może liniia SD, z iakąkolwiek inną linią poprowadzoną na tey płafzczyznie, przez punkt D, i gdyby z punktu P, iako ze środka promieniem równym linii PD, nakryślony był okrąg koła, wfzyftkie liniie ciągnione od punktu S, do punktów tego okręgu, czyniłyby iednakowy zawfze kąt z tą płafzczyzną.

Ponieważ te podania fą tylko do innych głownieyfzych *pomocnicze* (fubfidiariæ) i łatwe do dowiedzenia, przestaie fię tu na famym ich wyrażeniu.

13. *Twierdz:* 8. Gdy dwie liniie równoodległe fą od trzeciey, która na odmienney od nich leży płafzczyznie; te

dwie

dwie liniie i od siebie równoodległe będą.

Tab: I. Fig: 4. Niech będą dwie liniie AB, CD, równoodległe od linii EF, będą te dwie liniie i od siebie równoodległemi. Od punktu którego kolwiek na linii EF, naprz: G, wyciągnijmy, dwie do tey linii prostopadłe GH GI, na płaszczyznach przechodzących przez tęż linią EF, i przez AB; i CD. Ponieważ liniia EF, iest prostopadłą, tak do lini GH, iako i do linii GI, więc też będzie prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey przez te dwie liniie. A że znowu dwie liniie AB, CB są równoodległe od linii EF, więc są obiedwie prostopadłe do płaszczyzny przechodzącey przez liniie GH, GI, a zatym są od siebie równoodległe.

14. *Twierdz:* 9. Gdy dwie liniie, które się przecinaią są równoodległe względem dwóch drugich, które się także przecinaią, kąt zawarty między dwiema pierwszemi liniami, równy będzie kątowi zawartemu między dwiema drugiemi.

Tab: I. Fig: 5. Niech będą dwie liniie AB, AC, równoodległe względem dwóch drugich DE,

DE, DF; kąt BAC zawarty między dwiema pierwszemi, równy iest kątowi EDF zawartemu między dwiema drugiemi.

Weźmy równe liniie AB, DE, i równe także liniie AC, DF. Pociągniymy liniie AD, BE, CF, BC, EF.

Ponieważ linie AB, ED, są równe, i równoodległe, Czworokąt ABED będzie oraz Równoległobokiem, i liniie też AD, BE, bądą równemi, i równoodległemi.

Podobnie równe są i równoodległe liniie AD, CF; więc liniie BE, CF są też równe, i równoodległe. względem linii AD; a zatym równe są sobie, i od siebie równoodległe. Jest tedy Czworokąt BEFC, oraz Równoległobokiem, a w szczegulności równe są liniie BC, EF. Przeto Tróykąty BAC, EDF, boki trzy równe maią, iedne względem drugich, a zatym przystać mogą do siebie, a w szczegulności równe są kąty BAC, EDF.

15. *Przystosowanie*. Niech będą dwie płaszczyzny, które się przecinaią. Na każdey z tych płaszczyznie wystawmy prostopadłą, do spolnego ich przecięcia, wyprowadzoną od punktu któregokolwiek

wiek tegoż przecięcia. Kąt zawarty między dwiema temi prostopadłemi, iednakowy zawsze będzie, chociaż coraz inny na spolnym przecięciu punkt wybierać będziemy, do wyprowadzenia z niego tych prostopadłych.

Defin: Jest przeto taki kąt zdatnym do wymierzenia pochyłości tych dwóch płaszczyzn iedney względem drugiey. Gdy zatym kąt zawarty między temi dwiema prostopadłemi, iest prosty, mówi się, że w takim razie *płaszczyzna iedna iest prostopadłą do drugiey.* Gdyby zaś kąt między temi dwiema prostopadłemi zawarty, miał: 10°, 20°, 30° i t. d. w tym razie i dwie płaszyzny zawierałyby kąty: 10°, 20°, 30°, i t. d.

Można ieszcze i w inny sposob, przeświadczyć się iako pochyłość dwóch prostopadłych, wyciągnionych na dwóch płaszczyznach, od iednego punktu linii przecięcia spolnego tych płaszczyzn, odpowiada zawsze pochyłości tychże dwóch płaszczyn. Wystawmy albowiem sobie te dwie płaszczyzny przystaiące do siebie, i leżące iedna na drugiey. Niech potym spodnia płaszczyzna zostanie na swoim mieyscu; a wy-

a wyżſza niech ſię podnoſi, i obraca około ſpólnego przecięcia. Spolne przecięcie, podczas tego obrotu będzie zawſze proſtopadłe, do dwóch liniy proſtopadłych wyciągnionych na obydwóch płaſzczyznach, od iednego punktu; a zatym te dwie proſtopadłe zoſtaiące zawſze każda na ſwoiey płaſzczyznie, odpowiadać będą podczas tego obrotu, pochyłości dwóch płaſzczyzn. Gdy naprz: płaſzczyzna ruchoma, obieży połowę drogi, którą iey obeyść trzeba, aby ſię znalazła na drugiey ſtronie, w równi z płaſzyzną ruchomą, w ten czas i proſtopadła do ſpolnego przecięcia, znayduiąca ſię na płaſzczyznie ruchomey obieży połowę tey drogi, którą ma obeyść, aby ſię w iedney równi ſtykała końcem ſwoim z drugą liniią proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia wyciągnioną na płaſzczyznie nieruchomey. Toż mówić i o innych częściach tego obrotu.

16. *Twierdz:* 10. Gdy iaka proſta liniia proſtopadłą ieſt do płaſzyzny, do tey że płaſzczyzny proſtopadłą będzie każda inna płaſzczyzna przez tę liniią przechodząca.

Niech

Tab: I. Fig: 6. Niech będzie liniia GP, proſtopadłą do iakiey płaſzczyzny, i niech przez tę liniią GP, przechodzi inna iakakolwiek płaſzczyzna; ta proſtopadłą będzie do pierwſzey płaſzczyzny.

Niech liniia AB, będzie ſpolnym tych dwóch płaſzczyzn przecięciem; od punktu P, przez pierwſzą płaſzczyznę wyciągniymy PC, proſtopadłą do tego ſpolnego przecięcia.

Ponieważ liniią GP, wzieliśmy za proſtopadłą do pierwſzey płaſzczyzny, więc GP proſtopadłą będzie tak do linii, AB, iako i do linii PC; bo te dwie liniie przechodzą przez pierwſzą płaſzczyznę; á zatym od punktu któregokolwiek nap: P. znayduiącego ſię na ſpolnym przecięciu dwóch tych płaſzczyzn, wyciągnowſzy, proſtopadłe PG. PC, do tegoż ſpolnego przecięcia, te liniie będą proſtopadłe iedna do drugiey; a ztąd proſtopadłe będą do ſiebie i tè dwie płaſzczyzny.

17. *Wnioſek.* Gdy liniia iaka proſtopadłą ieſt do płaſzczyzny, a na teyże płaſzczyznie pociągniemy iakąkolwiek inną liniią, i do tey ſpuściemy drugą proſtopadłą

ſtopadłą od ſpodku pierwſzey proſtopadłéy; poprowadziwſzy potym od którego kolwiek punktu pierwſzey proſtopadłey, liniią do punktu, w którym druga proſt opadła ſpotyka liniią pociągnioną na płaſzczyznie; ta oſtatnia liniia poprowadzona, proſtopadłą będzie do linii na płaſzczyznie pociągnioney.

Niech będzie SP, proſtopadłą do płaſzczyzny; pociągnyimy na teyże płaſzczyznie liniią AB, i ſpuśćmy do niey proſtopadłą PD od ſpodku P, linii SP. Poprowadziwſzy z punktu któregokolwiek, naprz: S, linii proſtopadłey SP, liniią SD, do punktu D, w którym proſtopadła PD ſpotyka liniią AB, ta liniia SD, będzie proſtopadłą do AB. *Tab: I. Fig: 3.*

Przez punkt P, przeciągniymy EF równoodległą od AB.

Ponieważ liniia SP proſtopadła ieſt do płaſzczyzny, daney, będzie też proſtopadłą i do EF znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie; a wzaiemnie i EF będzie proſtopadłą do SP. Taż liniia EF, iako równoodległa od AB, ieſt też proſtopadłą do PD; a zatym będąc proſtopadłą tak do PD, iako i do PS, będzie także pro-

 ſtopa-

ſtopadłą i do płaſzczyzny SPD przechodzącey przez te dwie liniie; więc i AB równoodległa od EF będzie też proſtopadłą do płaſzczyzny SPD, a wſzczegulności będzie proſtopadłą do linii SD, znayduiącey ſię na tey płaſzczyznie.

18. *Twierdz:* 11. Gdy płaſzczyzna iedna proſtopadłą ieſt do drugiey, a przez którykolwiek punkt iedney z tych płaſzczyzny pociągniemy proſtopadłą do drugiey, ta proſtopadła padnie na ſpolne przecięcie tych dwóch płaſzczyzn.

Dowodz: Gdyby liniia SP nie padała na ſpolne przecięcie dwóch płaſzczyzn, tedy ſpuściwſzy z tegoż ſamego punktu S, proſtopadłą, do ſpolnego przecięcia, ta byłaby oraz proſtopadłą i do drugiey płaſzczyzny, a zatym dwie proſtopadłe z iednego punktu ſpuſzczone byłyby, na iednę płaſzczyznę, co być nie może.

19. *Twierdz:* 12. Gdy dwie płaſzczyzny proſtopadłe ſą do trzeciey, ſpolne przecięcie tychże dwóch płaſzczyzn, proſtopadłe też będzie do teyże trzeciey płaſzczyzny.

Dowodz: Od punktu, w którym liniia przecięcia dwóch pierwſzych płazczyzn,

ſpotyka

ſpotyka trzecią płaſzczyznę; pociągnąwſzy tak na iedney iak i na drugiey z dwóch pierwſzych płaſzczyzn proſtopadłe do dwóch liniy ſpolnego ich przecięcia z trzecią płaſzczyzną, te dwie proſtopadłe, proſtopadłemi też będą do trzeciey płaſzczyzny; a zatym gdyby te dwie proſtopadłe nie zeſzły ſię w iednę, i nie były w rzeczy ſamey iedną liniią, która ieſt ſpolnym przecięciem dwóch pierwſzych płaſzczyzn, tedy od iednego punktu możnaby do iedney płaſzczyzny dwie proſtopadłe wyprowadzić; to zaś być nie może.

20. *Twierdz:* 13. Ggdy iedna liniia proſtopadłą ieſt do dwóch płaſzczyzn, te dwie płaſzczyzny, nigdzie ſię z ſobą nie zeydą, choćby naydaley były przedłużone.

Dowodz: Gdyby te dwie płaſzczyzny mogły ſię ſpotkać z ſobą, tedy Tróykąt zrobiony z tey proſtopadłey i z dwóch liniy poprowadzonych od punktu iakiegokolwiek na ſpolnym przecięciu dwoch tych płaſzczyzn, do punktów w których proſtopadła ſpotyka też płaſzczyny, miałby dwa kąty proſte, co być nie może.

C 2 *Defin:*

Defin: Dwie płaſzczyzny, ktòre nawet przedłużone ſpotkać ſię z ſobą nie mogą, nazywaią ſię *rownoodległemi.*

21. *Twierdz*: 14. Gdy dwie liniie ſą rownoodległe względem dwòch drugich, płaſzczyzna przechodząca przez dwie pierwſze liniie, będzie rownoodległa od płaſzczyzny przechodzącey przez dwie drugie liniie.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie liniie AB, AC rownoodległe względem dwòch drugich DE, DF; płaſzczyzna przechodząca przez liniie AB, AC, rownoodległa będzie od płaſzczyzny przechodzącey przez liniie DE, DF.

Z wierzchołku A, kąta zawartego między dwiema pierwſzemi liniiami ſpuśćmy proſtopadłą AG do płaſzczyzny przechodzącey przez drugie dwie liniie, i od ſpodku G, tey proſtopadłey poprowadźmy na teyże ſamey płaſzczyznie liniie GH, GI, rownoodległe względem liniy DE, DF.

Liniia AG, proſtopadła do drugiey płaſzczyzny, ieſt też proſtopadłą, i do liniy GH, GI; a że liniie AC, GI, ſą obiedwie

biedwie równoodległe od linii DF, więc i od siebie są równoodległemi; a zatym liniia AG, iest także prostopadłą do linii AC. Tymże sposobem pokazać można, że liniia AG, iest też prostopałą i do linii AB. Więc ta liniia AG, iest prostopadłą do płaszczyzny przechodzącey, przez liniie AB, AC; a zatym i dwie płaszczyzny przechodzące iedna przez liniie AB, AC, druga przez liniie DE, DF, są obiedwie prostopadłe do teyże samey linii AG, a przeto są od siebie równoodległe.

22. *Twierdz*: 15, Gdy dwie płaszczyzny równoodległe od siebie przecina trzecia płaszczyzna, ich spólne przecięcia z trzecią płaszczyzną, będą też od siebie równoodległe.

Dowodz: Gdyby te spolne przecięcia, z trzecią płaszczyzną spotkały się gdzie z sobą, tedy punkt przecięcia tych dwóch przecięć, należąc tak do iednego iak i do drugiego spolnego przecięcia, dwóch płaszczyzn z trzecią, należałby też tak do iedney, iak i do drugiey z dwóch płaszczyzn przecinaiących trzecią; a zatym dwie płaszczyzny spotkałyby się gdzie z sobą, to iest nie byłyby, iak są, równoodległe.

23. *Twierdz*: 16. Gdy dwie płaszczyzny są od siebie równoodległe; liniia któ-

ra

ra ieſt proſtopadłą do iedney, z tych płaſzczyzn, będzie proſtopadłą i do drugiey.

Tab. I. Fig. 7. Niech będą dwie płaſzczyzny równoodległe: BAC, EDF; i liniia AG proſtopadła, do iedney z tych płaszczyzn nap: do pierwſzey; taż liniia proſtopadłą będzie i do drugiey płaſzczyzny.

Jeżeli liniia AG, nie ieſt proſtopadłą do któreykolwiek linii, takiey iak GH, przeciągnioney przez ſpodek G, teyże linii AG, który ieſt na płaſzczyznie EDF; tedy przeciągnąwſzy przez linie GH, AG, płaſzczyznę, któraby przecieła płaſzczyznę BAC, w linii AB; liniia AG będzie proſtopadłą do linii AB; więc linie AB, GH, z których iedna ieſt, a druga nie ieſt proſtopadłą do linii AG, leżącey na teyże ſamey, co one, płaſzczyznie, ſpotkać ſię mogą z ſobą; a przeto i płaſzczyzny, na których leżą ſpotkać ſię też z ſobą mogą, i nie będą równoodległe; co ieſt przeciwko warunkowi,

24, *Twie:* 17. Gdy dwie linie leżące albo nie leżące na iedney płaſzczyznie, przecięte ſą przez trzy równoodległe od ſiebie pła-

płaſzczyzny, te liniie będą od tych płaſzczyzn przecięte proporcyonalnie.

Niech będą dwie liniie AB, CD, leżące, albo nie, na iedney płaſzczyznie; niech trzy płaſzczyzny rownoodległe przecinaią pierwſzą liniią w punktach, B, F, A, a drugą w punktach, C,G,D; będzie, BF : AF = CG : DG. Tab. I. Fig: 8.

Poprowadźmy liniią BD, ſpotykaiącą płaſzczyznę średnią w punkcie E.

Liniie EF, AD, ſą ſpolnemi przecięciami płaſzczyzny BAD, z dwiema płaſzczyznami równoodległemi; więc te dwie liniie ſą od ſiebie równoodległe ; a zatym podobne ſą Tróykąty: BFE, BAD; przeto, BF : AF = BE : ED.

Dla teyże przyczyny podobne będą i Tróykąty ; BDC, EDG, a zatym BE: ED = CG : GD. Więc też będzie, BF: AF = CG : GD.

Uwaga W tym razie tylko liniie BC, AD ſą równoodległe, i oraz linie FE, EG, iednę czynią liniią, gdy liniie AB, CD na teyże ſamey płaſzczyznie znayduią ſię.

ROZDZIAŁ

ROZDZIAŁ II.

O Kątach Bryłowych.

DEfin: Wykreślmy iakikolwiek Wielokąt na płaszczyznie ; od każdego wierzchołka kąta w tym Wielokącie wyciągniymy liniie do iednego punktu, nie na tey płaszczyznie będącego. Przy tym punkcie tyle się zrobi kątów znayduiących się na odmiennych płaszczyznach, ile Wielokąt nayprzod wykreślony, miał boków. Summa tych wszystkich *kątów płaskich*, nazywa się, *kątem Bryłowym* (angulus solidus). Punkt, który iest spólnym wierzchołkiem wszystkich kątów płaskich, nazywa się: *wierzchołkiem* tego kąta bryłowego. Płaszczyzny na których się znayduią kąty płaskie, które ten wierzchołek czynią, nazwać można, *ścianami* (paries albo facies:) a zaś spolne tych płaszczyzn przecięcia *krawędziami* (po Francuzku *Arrêtes.*)

Przestroga. W tym wszystkim, co się tu o kątach bryłowych powie, wystawiać sobie trzeba nie inne Wielokąty, iak tylko te, których krawędzie scho-

dząc

dząe śię w ich wierzchołkach, ſame kąty wyſkakuiące tam czynią (b).

Trzy rzeczy uważać można w kącie bryłowym: ściany albo kąty płaſkie, ktòre go tworzą, pochyłości wzaiemne tych ścian, i ſtoſunek placu zawartego między temi ścianami, do placu całego, około wierzchołka kąta bryłowego; w podobny prawie ſpoſob, iak też uważaliśmy wielkość kąta płaſkiego, względem całego placu, około wierzchołka tegoż kąta, na iedney z tym placem płaſzczyznie znayduiącego śię. *Obacz niżey, co ſłuży do oſtatniey tey uwagi, w Rozdziale o kuli (Sphæra.)* Jako Wielokąt, w którego wierzchołkach kończą śię krawędzie kąta bryłowego, może być na Trőykąty podzielony przez przekątne ciągnione od iednego z wierzchołków iego; tak też i kąt bryłowy iakikolwiek, podzielić można na inne kąty bryłowe, złożone z trzech tylko kątów płaſkich. Przeto i Geometrowie naywięcey śię bawią około kątów bryłowych

(b) *Obacz o innych kątach bryłowych, Rozprawę P: Bermanna, pod tytułem* De angulis ſolidis Diſſertatio Vitembergæ 1764.

wych, trzema kątami płaſkiemi określonych, aby doſzli pochyłości ścian, lub ich wielkości; a potym wiadome maiąc doſtatecznie te pochyłości i wielkości ścian, wyznaczaią kąt bryłowy, który ſię z tych ścian układa. Część ta Geometryi, w ktòrey o kątach bryłowych rzecz ieſt, pod tą, pod którą ie wyſtawuiemy poſtacia nazywa ſię Trygonometryą *kulną*, albo sferyczną. (Trigonometria ſpherica). Damy przyczynę tego nazwiſka, gdy ſię o kuli mówić będzie. Jeſt ta część koniecznie potrzebna Aſtronomom. Na daniu pierwſzych o niey początków, tu przeſtaniemy, i nie więcey mowić będziemy o kątach bryłowych, tylko tyle, ile wiedzieć potrzeba będzie dla zrozumienia podań ściągaiących ſię do ſamychże brył.

25, *Twierdz:* 1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, ſumma dwóch z tych trzech kątów, większa ieſt od kąta trzeciego.

Tab. II. Fig. 1. *Dowodz:* Niech będzie kąt bryłowy w A zrobiony z trzech kątów płaſkich: BAC, BAD, CAD; którykolwiek z tych trzech kątów wzięty, mnieyſzy ieſt od ſummy dwóch innych.

Jeżeli

Jeżeli te trzy kąty ſą wſzyſtkie równe, iuż oczywiście dwa, więkſze ſą od iednego.

Jeżeli zaś kąt ieden nap: BAC, więkſzy ieſt tak od kąta BAD, iak i od kąta CAD, tedy wſzelako mnieyſzy będzie od ſummy obydwóch.

Zróbmy albowiem na płaſzczyznie BAC, kąt BAE równy kątowi nap: BAD; i weźmy dwie długości równe AD, AE; na linii także AB, weźmy punkt którykolwiek, nap: B; Przez trzy punkta: B, D, E, niech przechodzi płaſzczyzna przecinaiąca krawędź AC w punkcie C.

Dwa Tróykąty: BAD, BAE, maią bok ſpolny AB, boki: AD, AE, równe, i kąty między temi bokami zawarte, równe; więc te Tróykąty mogą przyſiąć do ſiebie, a wſzczególności, liniie: BD, BE, ſą równe. Aże w Tróykącie, BDC, ſumma boków: BD, CD więkſza ieſt od trzeciego boku: BC, więc bok DC, więkſzy ieſt od linii CE; a zatym Tróykąty: CAD, CAE maią bok ſpolny AC, boki: AD, AE, równe; podſtawa zaś DC, iednego więkſza ieſt od podſtawy CE, drugiego; więc kąt: CAD, w wierzchołku,

pier-

pierwſzego Tróykąta, większy ieſt od kąta: CAE, w wierzchołku drugiego; więc i ſumma kątów: BAD, CAD, większa ieſt od ſummy kątów: BAE, CAE, to ieſt: większa od kąta BAC.

26. *Twierdz:* 2. W kącie bryłowym, ſumma wſzyſtkich kątów płaſkich, mnieyſza ieſt od ſummy czterech kątów proſtych. (c)

Dowodz: Wierzchołki Wielokąta, na których wſpieraią ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego, ſą oraz wierzchołkami tylu innych kątów bryłowych zro-

bionych

(c) *Trzeba mieć na pamięci, że ſię tu nie mówi, tylko o kątach bryłowych, których krawędzie wſpieraią ſię na wierzchołkach Wielokąta, maiącego ſame tylko kąty wyſkakuiące. W przypadku od tego odmiennym, mogą być kąty bryłowe takie, w których ſumma kątów płaſkich, będzie większa od 4. kątów proſtych tyle, ile zechcemy. P. Le Sage Genewenczyk pierwſzy tę prawdę odkrył, która też pierwſza i ſama iedna zdaie ſię uchybienie zadawać Euklidesowi. Obacz Hiſtoryą Akademii Nauk Paryſkiey na Rok 1756.*

bionych przez kąty trzy płaſkie, ile ten Wielokąt ma wierzchołków; gdyż każde dwa z tych kątów płaſkich wchodzących w kąt ieden bryłowy, znayduią ſię przy podſtawach ścian tego kąta bryłowego, a trzeci takowy kąt należy do podſtawy kąta bryłowego w wierzchołku, to ieſt: do Wielokąta na którym ſię wſzyſtkie krawędzie kąta bryłowego w wierzchołku, wſpieraią.

Na każdey z tych ścian ſumma trzech kątów, iednego w wierzchołku, a dwóch przy podſtawie ściany, równa ſię ſummie dwoch kątów proſtych; a za tym ſumma wſzyſtkich kątów w wierzchołku i wſzyſtkich kątów przy podſtawach ścian, równać ſię będzie, dwom kątom proſtym tyle razy wziętym, ile ma ścian kąt bryłowy.

Summa dwóch kątów przy podſtawach ścian, większa ieſt od kąta trzeciego przy podſtawie kąta bryłowego, który kąt trzeci, z dwoma tamtemi robi kąt ieden bryłowy przy tey podſtawie; a zatym ſumma wſzyſtkich kątów przy podſtwach ścian wſzyſtkich, większa ieſt od ſummy wſzyſtkich kątów przy podſtawie kąta bryłowego.

Więc

Więc summie wszystkich kątów, przy podstawach ścian, mniey nie dostaie do summy dwa razy tylu kątów prostych, ile Wielokąt, czyli podstawa kąta bryłowego, ma boków; niżeli summie wszystkich kątów Wielokąta tego nie dostaie do teyże summy dwa razy tylu kątów prostych, ile ten Wielokąt ma boków.

A że summie kątów wszystkich Wielokąta do przerzeczoney summy, brakuie 4. kątów prostych, więc summie kątów wszystkich przy podstawach ścian, brakować będzie do teyże summy mniey niż 4. kąty proste. Ze zaś summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, spełnia ten niedostatek mnieyszy od 4. kątów prostych, więc summa wszystkich kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, mnieysza iest od 4. kątów prostych.

To Twierdzenie obiaśnić trzeba przez wiele przykładów szczegulnych, biorąc różne liczby ścian kąta bryłowego nap: 3, 4, 5, 6. i t. d. w których to razach, takoważ liczba 3, 4. 5, 6, i t. d. będzie wyrażać boki Wielokąta służącego kątowi bryłowemu za podstawę; summa zaś ką-

tow

tów Wielokąta będzie ważyć: 2, 4, 6, 8, i t. d. kątów prostych, a zatym summa kątów przy podstawach ścian będzie ważyć więcey niż 2, 4, 6, 8, i t, d. kątów prostych. Ze zaś summa tych ostatnich kątów wraz z summą kątów przy wierzchołku kąta bryłowego, waży w tychże razach, kątów prostych 6, 8, 10, 12, więc summa kątów samych przy tym wierzchołku mnieysza iest, niż *nadmiar* (excessus) liczb.

6, 8, 10, 12, i t. d.

nad liczby - - 2, 4, 6, 8, i t. d.

To iest: ta summa kątów przy wierzchołku mnieysza iest od 4. kątów prostych.

Można prawdę tego Twierdzenia okazać i w sposób następuiący:

Obierzmy punkt iakikolwiek, wpośród Wielokąta, i pociągniymy od niego liniie do wszystkich wierzchołków tego Wielokąta. Summa wszystkich kątów, około tego punktu, zrówna summę 4. kątów prostych. Wynieśmy teraz myślą ten punkt nad płaszczyznę Wielokąta,

podług

podług ciągu linii proſtopadłey do tey płaſzczyzny. Jm bardziey ten punkt oddalony będzie od wierzchołków Wielokąta, tym bardziey zmnieyſzy ſię każdy kąt przy tym punkcie, zawarty między liniiami, od niego poprowadzonemi do wierzchołków Wielokąta; a zatym tym mnieyſza będzie ſumma wſzytkich kątów przy tym punkcie, od ſummy pierwſzey 4. kątów proſtych.

27. *Przyſtoſowanie.* Pięć tylko ieſt gatunków kątów należących do Wielokątów foremnych, z których może ſię złożyć kąt bryłowy.

1. W kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów Tróykąta równobocznego, każdy taki kąt ważyłby $\frac{2}{3}$ kąta proſtego, a zatym ſumma ich ważyłaby 2. kąty proſte.

2. W kącie brvłowym, złożonym z czterech kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów, ważyłaby $2\frac{2}{3}$ kąty proſte.

3. W kącie bryłowym, złożonym z piąciu kątów Tróykąta równobocznego, ſumma takich kątów ważyłaby $3\frac{1}{3}$ kąty proſte.

Sześć

Sześć kątów Tròykata równobocznego, waży katów prostych cztery. Są one zdatne do napełnienia placu, około punktu iakiego na płaszczyznie, nie zaś do zrobienia kata bryłowego. Summa więcey niż sześciù takowych kątów, ważyłaby też więcey niż cztery kąty proste.

4. W kacie brylowym złożonym z trzech kątów kwadratu, każdy takowy kat. bylby kątem prostym, a zatym summa takowych kątów równałaby się summie 3 katów prostych; summa 4 kątów kwadratu, byłaby summą 4 katów prostych; a przeto z 4 takowych kątów składać się nie może kat bryłowy, daleko zaś bardziey składać się nie może z większey liczby takich kątów.

5. W kącie brylowym, złożonym z trzech kątów, Pięciokata foremnego, każdy takowy kat ważyłby $1\frac{1}{5}$ kat prosty; a zatym summa ich ważyłaby $3\frac{3}{5}$ kąty proste.

Summa czterech takowych katów, a tym bardziey więcey niż czterech ważyłaby więcey, niż cztery kąty proste.

Summa trzech kątów Sześciokąta foremnego waży cztery kąty proste, a zatym żaden kąt bryłowy nie złoży się z samych kątów Sześciokąta foremnego; tym bardziey zaś żaden kąt bryłowy składać się nie może z samych kątów należących do Wielokątów foremnych, które więccy niż sześć boków maią.

Jeżeli tedy znayduią się bryły iakie, których ścianami są Wielokąty iednakowego tylko gatunku, takich brył gatunków, więcey iak pięć być nie może.

Bryła, którey każdy kąt bryłowy złożony iest z trzech kątów Tróykąta równobocznego, ma 4. ściany, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 4 kąty bryłowe. Nazywa się *Czworościanem* (Tetraëdrum).

Bryła, którey każdy kat złożony iest z 4. kątów Tróykąta równobocznego, ma ścian 8, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 6. kątów bryłowych. Nazywa się *Ośmiościanem* (Octoëdrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 5 kątów Tróykąta równobocznego, [illegible] ma

ma 20. ścian, z których każda iest Tróykątem równobocznym, i 12. kątów bryłowych. Nazywa się *Dwudziestościanem* (Icosaëdrum.)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 3 kątów kwadratu, ma 6 ścian, z których każda iest kwadratem, i 8 kątów bryłowych. Nazywa się *Sześcianem* (Hexaëdrum,) a zwyczayniey (*Cubus.*)

Bryła, którey każdy kąt złożony iest z 3 kątów Pięciokąta foremnego, ma 12 ścian, z których każda iest Pięciokątem foremnym, i 20 kątów bryłowych. Nazywa się *Dwunastościanem* (Dodecaëdrum.)

Dosyć będzie pokazać uczniom takie bryły, nie wchodząc w obszerne w tey mierze rozwodzenia się, które więcey samey ciekawości dogadzaią, niż pożytek przynoszą. Te bryły, gdy wszystkie kąty maią równe, i wszystkie ściany foremne, i mogące przystać iedne do drugich, nazywaią się bryłami *foremnemi.*

Gdyby w kącie bryłowym pomieszać chcieliśmy różne kąty Wielokątów foremnych, końcem złożenia tegoż kąta

 bryło-

bryłowego, liczba takich kątów płaskich, mogłaby być do upodobania powiększona.

28. *Twierdz:* 3. Gdy dwa kąty bryłowe złożone są z trzech kątów płaskich, równych iednych, względem drugich; pochyłości ścian, tychże kątów bryłowych równe też są iedne względem drugich.

Tab. II Fig. 2. Niech będą dwa kąty bryłowe: ABCD, abcd złożone z równych kątów względem siebie: BAD, bad, BAC, bac, DAC, dac; pochyłości płaszczyzn równe też będą iedne względem drugich; nap: pochyłość płaszczyzny BAD do BAC, równa iest pochyłości płaszczyzny bad, do bac.

Wykreśl: Weźmy równe liniie AB, ab, na płaszczyznach: BAD, bad: wynieśmy do AB prostopadłą BD, a do ab, prostopadłą bd. Na płaszczyznach także BAC, bac, wyprowadzmy do tychże linii AB, ab, prostopadłe: BC, bc. Kąty CBD, cbd, będą kątami pochyłości płaszczyzn BAD, BAC, i bad, bac; a zatym dowieść należy, że te kąty: CBD, cbd, są równe.

Dowodz:

Dowodz: Dwa Tróykąty DBA, dba ſą proſtokątne w B i b; maią równe kąty BAD, bad, i boki: AB, ab, równe; więc mogą przyſtać do ſiebie; a wſzczegulności, liniie: BD, bd ſą równe, iako też i liniie AD, ad.

Dla teyże przyczyny i Tróykąty BAC, bac przyſtać do ſiebie mogą, a wſzczegulności liniie BC, bc, ſą równe, iako też i liniie AC, ac.

Więc Tróykąty CAD, cad, maią boki AC, ac równe; i boki AD, ad także równe, a maiąc oprocz tego i kąty między temi bokami zawarte, równe, przyſtać do ſiebie mogą; wſzczegulności zaś liniie CD, cd, ſą równe.

Więc Tróykąty: CBD, cbd, maią wſzyſtkie boki równe, iedne względem drugich, a zatym do ſiebie przyſtać mogą; a wſzczegulności kąty: CBD, cbd, ſą równe.

29. *Twierdz:* 4. Gdy dwa kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów płaſkich, które równe ſą iedne względem drugich, takie kąty bryłowe, mogą przyſtać do ſiebie.

Niech

Niech będzie kąt bryłowy w A. złożony z trzech kątów płaſkich: BAD, BAC, DAC, równych względem kątów płaſkich: bad, bac, dac, z których ſię ſkłada kąt drugi bryłowy w *a*.; te dwa kąty bryłowe, mogą przyſtać do ſiebie.

Wyſtawmy ſobie w myśli drugi z tych kątów, iakoby przenieſiony, tak; aby wierzchołek a, przypadł na wierzchołek A; liniia zaś ab aby leżała na linii AB. Ponieważ kąty: BAD, bad, wzięte ſą za równe, liniia więc ad, będzie też leżeć na linii AD.

Aże trzy kąty płaſkie w *a*, równe ſą trzem kątom w A; równe więc będą pochyłości płaſzczyzn BAD, BAC, i płaſzczyzn bad, bac; a zatym płaſzczyzna bac, leżeć będzie na płaſzczyznie BAC. Dla równości zaś kątów bac, BAC, liniia ac leżeć będzie na linii AC; więc tak liniia ad, leży na linii AD, iak i ac na AC; a zatym płaſzczyzna cad przyſtanie do płaſzczyzny CAD; przyſtaną tedy do ſiebie te dwa kąty bryłowe.

3º. *Wnioſek.* Kąt bryłowy, określony trzema kątami płaſkiemi, iuż tym ſamym ieſt wyznaczony, gdy mamy wiadome te trzy kąty płaſkie.

Możnaby

Możnaby też pokazać, że z trzech kątów płaskich czyniących kąt bryłowy maiąc wiadome dwa z tych kąty, i pochyłość ich ścian, wyznacza się także kąt bryłowy; iako też z wiadomey tylko pochyłości wszystkich trzech ścian tego kąta.

Te iednak ostatnie podania, iż nie służą do naszego zamierzenia, przeto dosyć iest tu o nich tylko namienić.

31. *Zagadn:* 1. Zrobić kąt bryłowy, maiąc dane trzy kąty płaskie, z których ma być złożony tenże kąt bryłowy.

Do składu tego kąta bryłowego z 3. kątów płaskich; następuiący sposob, zdaie się być naywygodnieyszym.

Niech będą dane trzy kąty płaskie: *Tab: II.*
BAD, BAC, DAC, do zrobienia kąta *Fig:* 3.
bryłowego. Wystawmy sobie myślą, iż ten kąt iuż iest zrobiony. Weźmy ktorykolwiek punkt C, na krawędzi nap: AC; i od tego punktu, spuśćmy na inne krawędzie, AB, AD, linije prostopadłe: CB, CD; a znowu od punktów B, i D, na płaszczyznie BAD, poprowadźmy do teyże krawędzi, prostopadłe: BE, DE,

które

któte się przetną, w punkcie E. Pociągniymy nakoniec liniie: CE, AE.

Ponieważ liniie CB, EB są prostopadłe do linii AB, liniia więc AB iest prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a zatym płaszczyzna BAD, która przechodzi przez liniią AB, iest też prostopadłą do płaszczyzny: CBE; a wzaiemnie, i ta płaszczyzna iest do tamtey prostopadłą. Dla teyże przyczyny, płaszczyzna, CDE, prostopadłą iest do płaszczyzny BAD; więc obiedwie płaszczyzny: CBE, CDE, prostopadłe są do płeszczyzny: BAD; a zatym spolne ich przecięcie CE, iest także prostopadłym do płaszczyzny BAD; i płaszczyzna CAE, iest także prostopadłą do teyże płaszczyzny BAD. Zkąd wypada takowe wykreślenie.

Po obydwóch stronach linii ac, przy punkcie *a*, nakreślmy kąty: cab, cad, równe względem kątów danych CAB, CAD. Od punktu któregokolwiek teyże linii ac, nap: od *c* spuśćmy na dwa drugie ramiona, ab, ad, liniie prostopadłe; cb, cd; a na ramionach trzeciego kąta weźmy, zacząwszy od wierzchołka A, liniie AB, AD, równe względem liniy ab, ad. Od punktów B, i D wy-

pro-

prowadźmy proſtopadłe do liniy AB, AD, przecinaiące ſię w punkcie E, a od tego punktu wynieśmy znowu proſtopadłą EC, do płaszczyzny BAD. Niech przez linie EC, i AE przechodzi inna płaszyzna, na którey z punktu A, iak ze środka, promieniem równym odległości ac, nakreślmy łuk koła, który przetnie proſtopadłą EC, punkcie C; Naoſtatek przez punkt C, i liniie AB, AD, niech przechodzą dwie płaſzczyzny te, wraz z płaſzyzną BAD, zrobią kąt bryłowy, którego ſzukamy.

Jnaczey ieſzcze punkt C, będzie wyznaczony na proſtopadłey EC; gdy tylą liniią, EC, weźmiemy, aby kwadrat iey równał ſię różnicy kwadratów: linii ac, i AE, albo różnicy kwadratów: cd, i DE; albo nakoniec różnicy kwadratów: be i BE.

32. *Uwaga.* Używaiąc tego wykreślenia, można łatwo dowieść naſtępuiące Twierdzenie, na którym ſię zaſadza Trygonometrya kulna; to ieſt, że:

W każdym kącie bryłowym zrobionym z trzech kątów płaſkich, wſtawa iednego kąta płaſkiego, ieſt do wſtawy

drugie-

drugiego, iak wſtawa kąta pochyłości przeciwnego pierwſzemu kątowi, do wſtawy kąta pochyłości przeciwnego drugiemu kątowi; to ieſt, iak wſtawa kąta pochyłosci płaszczyzn dwóch ścian pod pierwſzym kątem będących, do wſtawy kąta pochyłości dwóch także ścian pod drugim kątem będących.

Jakoż liniie: CD, CB, ſą wſtawami, pierwſza kąta CAD, drugą, kąta CAB, wziąwſzy za promień liniią AC; a zatym te dwie liniie tak ſię do ſiebie maią, iak wſtawy tych dwòch kątów.

Aże w Tróykącie ECD proſtokątnym w E; CD : CE = Pr:Wſt. CDE

A w Tróyk. EBC; CE: CB = Wſt:CBE:Pr:

Więc złożywſzy te ſtoſunki, będzie; CD:CB = Wſt: CBE: Wſt. CDE.

To ieſt: Wſtawa kąta CAD, tak ſię ma do wſtawy kąta CAB, iak wſtawa kąta pochyłości dwóch płaszczyzn BAD, BAC, do wſtawy kąta pochyłości dwóch płaſzczyzn BAD, CAD.

32. *Zagadn:*

33. *Zagadn:* 2. Maiąc dane trzy kąty płaſkie, z ktòrych ſię ma ſkładać kąt bryłowy, wyrachować, iaka ma być pochyłość płaſzczyzn, aby ten kąt zrobiły.

Spoſob 1. W Czworokącie ABED, kąty przeciwne B, i D ſą proſte: więc Czworokąt ten może być w koło wpiſanym, a zatym kąty (w tymże ſamym odcinku) ADB, AEB będą równe. Wyrachowawſzy tedy w Tróykącie BAD kąt ADB, już tym ſamym znaydziemy i kąt AEB, równy tamtemu.

Stoſunek boku BC do BE, to ieſt ſtoſunek wſtawy całey, czyli promienia, do Doſtawy kąta pochyłości CBE, ſkłada ſię z ſtoſunków boków: BC do AB i AB do BE.

Ażeieſt; BC : AB = Stycz. BAC: Wſt. całey,

i - AB : BE = Wſt. cała: Doſtycz. AEB

więc; BC : BE = Sſtycz. BAC: Doſt. AEB

A zatym;

Stycz. BAC : Doſt: AEB = Pr:Doſt:CBE.

Spoſob 2. Wyciągnowſzy od punktu iednego nap: B znayduiącego ſię na któ-

reykol-

reykolwiek krawędzi kąta bryłowego, prostopadłe: BD, BC, do tey krawędzi, a na dwóch płaszczyznach, których spolnym przecięciem iest ta krawędź, niech te dwie prostopadłe spotykaią dwie drugie krawędzie w punktach: C, i D: Liniie BC, BD będą stycznemi, a liniie AC, AD będą siecznemi względem kątów, BAC, BAD, biorąc za promień liniią AB. Więc te liniie, mogą być wyrachowane na mieysce linii stałey AB, czyli promienia. W Tróykącie CAD, wiedząc dwa boki AC, AD i kąt CAD, między niemi zawarty możemy wyznaczyć bok trzeci, CD. W Tróykącie zatym CBD wiedzieć będziemy trzy boki, a ztąd możemy wyznaczyć kąt CBD, który iest kątem pochyłości dwóch płaszczyzn: BAD, BAC. Jnne też kąty pochyłości łatwo wyznaczemy podług uwagi poprzedzaiącey.

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podniesieniu liczby do Sześcianu albo Kubusa, *i o wyciągnieniu Pierwiastku Sześciennego, albo Kubicznego.*

Przed następuiącemi *Rozdziałami*, kładzie się nauka o podniesieniu liczby do Sześcianu, i o wyciąganiu Pierwiastku sześcien-

fześciennego; bo właśnie w tych rozdziałach, można będzie naukę tę do praktyki zaraz przyftofować.

34. Sześcian liczby iakiey robi fię, gdy tę liczbę przez nią famą raz mnożemy, i tak rozmnożoną, iefzcze raz przez nią mnożemy albo, co na iedno wychodzi, gdy tę liczbę mnożemy przez iey kwadrat. I tak Sześciany dziewięciu liczb pierwfzych.

1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9.

fą: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Sześciany liczb:

10. 20. 30, 40, - - - 90.

fą; 1000, 8000, 27000, 64000, - - - 729000.

Sześciany liczb:

100, 200, 300, - - 900.

fą: 1000000, 8000000, 27000000, 729000000.

35. Sześciany więc liczb maiących iedne tylko cyfrę, a refztę zerów, fą te [illegible] fame,

ſame, co i ſześciany tychże cyfr ſamych przez ſię, przydawſzy im trzy razy tyle zerów, ile ich było w liczbie, z którey ſię Sześcian robi.

Wyraz ten *Sześcian*, wzięty ieſt z Geometryi, w którey, aby mieć bryłowatość iakiego Sześcianu, rozmnaża ſię liczba wyrażaiąca wielkość boku iego, raz i drugi przez ſiebie.

Sześcian każdey liczby znaleść można, mnożąc iey kwadrat przez nią ſamę; podamy tu iednak inny ſpoſob zrobienia Sześcianu z liczby daney, a ten ſposób pomoże nam do przeciwnego działania, to ieſt do wyciągania Pierwiaſtku Sześciennego z liczby iakieykolwiek.

36. Sześcian liczby złożony z dwóch części, może być rozłożony na cztery części następuiące:

1. Na Sześcian pierwſzey części.

2. Na Kwadrat pierwſzey części trzy razy wzięty i rozmnożony przez część drugą.

3. Na Kwadrat drugiey części trzy razy wzięty, i rozmnożony przez część pierwſzą.

4. Na

4. Na Sześcian drugiey części.

I tak liczbę 5. rozłożywszy na dwie części naprzyk: 1, i 4; można uważać iey Sześcian, iakoby złożony z czterech części: 1, 12, 48, 64, których Summa iest: 125. Gdybyśmy zaś tę ſamę liczbę 5, uważali iako złożoną z dwóch części 2, i 3; iey Sześcian mogłby ſię był rozłożyć na cztery części: 8. 36, 54, 27.

Niechby potrzeba znaleść Sześcian liczby nap: 47; Ponieważ iey kwadrat (podług reguły iuż nam wiadomey) ſkłada ſię z kwadratu pierwſzey części 40, z teyże części 40, dwa razy wziętey, przez drugą, 7. rozmnożoney, i z kwadratu drugiey części 7; mnożąc cały ten kwadrat ieſzcze raz przez 40, i przez 7, albo przez 47, Sześcian z 47 ſkładać ſię będzie:

Z Kwadratu liczby 40, rozmnożonego przez 7, z 40, rozmnożonych przez kwadrat liczby 7, dwa razy wzięty, i z Sześcianu teyże liczby 7; (biorąc 7 za liczbę mnożącą;) bierąc znowu 40, za liczbę mnożącą; Sześcian z 47, ſkładać ſię ieſzcze będzie z Sześcianu liczby 40; z 7, rozmnożonych przez kwadrat

liczby

liczby 40, dwa razy wzięty; i z 40 rozmnożonych przez Kwadrat liczby 7, raz wzięty; a razem to wſzyſtko zebrawſzy, ſkładać ſię będzie z Sześcianu liczby 40, z kwadratu teyże liczby trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 7, z kwadratu liczby 7, trzy razy wziętego, a rozmnożonego przez 40, i z Sześcianu liczby 7. Co uczyni Summę: 103823, która ieſt Sześcianem liczby 47.

Ponieważ zaś niemożna ieſzcze dowieść tego Algebraicznie, trzeba przynaymniey będzie z Geometryi zaciągnąć obiaśnienia, pokazuiąc; że Sześcian linii złożoney z dwóch części, może być w rzeczy ſamey rozłożony na Sześciany każdey, z tych dwóch części, i na 6. Równoległościanow, z których trzy mieć będą za podſtawę kwadrat iedney części; a za wyſokość część drugą; trzy zaś inne, mieć będą za podſtawe kwadrat drugiey części, a za wyſokość część pierwſzą.

Wykonać to w ſkutku będzie można na Sześcianie z drewna lub z papieru tak zrobionym, aby te części od ſiebie ſię oddzielały.

38. Nay-

38. Navwygodniey ieſt, rozłożyć liczbę na iedności, dzieſiątki, ſta, i t. d. które w ſobie zawiera.

Niech będzie liczba nap: 12. Podzielmy ią na dwie części, 10, i 2. Sześcian iey ſkładać ſię będzie z części naſtępuiących:

1000. Sześcan dzieſiątku

600. Kwadrat dzieſiątku trzy razy wzięty przez iedności rozmnożony.

120. Kwadrat iedności trzy razy wzięty przez dzieſiątek rozmnożony

8. Sześcian dwóch iedności.

1728 Sześcian z 12.

Niech będzie liczba 84, rozebrana na dwie części 80, i 4; Sześcian iey mieć będzie części naſtępuiące:

512000.	Sześcian dziesiątków,
76800.	Kwadrat dziesiątków trzy razy wzięty, przez iedności rozmnożony.
3840.	Kwadrat tychże iedności trzy razy wzięty przez dziesiątki rozmnożony.
64.	Sześcian z iedności.
592704.	Sześcian z 84.

Niech będzie liczba 324, rozebrana na dwie części 320 i 4; aby zaś mieć Sześcian pierwszey części, rozłożmy ią na części 300, i 20,

27000000.	Sześcian stów
5400000.	Kwadrat stów potróyny przez dziesiątki rozmnożony.
360000.	Kwadrat dziesiątków potróyny przez sta rozmnożony.
8000.	Sześcian dziesiątków.
1228800.	Kwadrat z 320 potróyny rozmnożony przez iedności
15360.	Kwadrat z iedności potróyny, rozmnożony przez 320.
64.	Sześcian iedności.
34012224.	Sześcian z 324.

Niechby

Niechby trzeba zrobić Sześcian z 8421.

512000000000	Sześcian z 8000.
76800000000	Kwadrat z 8000 potróyny, roz: przez 400.
3840000000.	Kwadrat z 400 potróyny roz: przez 8000.
64000000.	Sześcian z 400.
42336000000.	Kwadrat z 8400 potròyny rozm: przez 20.
10080000.	Kwadrat z 20. potróyny rozmn: przez 8400.
8000.	Sześcian z 20.
212689200.	Kwadrat z 8420 potróyny rozmn: przez 1.
25260.	Kwadrat z 1. potróyny rozmn: przez 8420.
1.	Sześcian z 1.
597160402461.	Sześcian z 8421.

E 2 39. Wi-

39. Widziemy na poprzedzaiących przykładach, iż przez takowy rozbior, każda część następuiąca Sześcianu mniey ma iednym zerem, od części, która ią poprzedziła; i że iako pierwsza część Sześcianu iest zawsze Sześcianem, a po nim następuią dwie części, każda złożona z potróynego kwadratu iedney części rozmnożonego przez część drugą; tak i daley, tymże porządkiem idą, i dalsze wyrazy części składaiących Sześcian.

40. Można było opuścić zera kładąc tylko same cyfry znaczące, a w każdey części następuiącey występuiąc z ostatnią cyfrą w prawą. I tak części Sześcianu mogły być w ten sposób wypisane.

```
27
 54
  36
   8
 12288
  1536
    64
--------
34012224.
```

41. Ten

41. Ten ſpoſob poſtępowania, pokazuie nam, że liczba wyrażaiąca Sześcian iedności, kończy ſię na oſtatniey po prawey ręce cyfrze, że Sześcian dzieſiątków kończy ſię na czwartey od prawey ręki cyfrze; liczba Sześcianu ſtów, kończy ſię na ſiodmey cyfrze od teyże ſtrony rachuiąc, i t, d.

Zeby więc wiedzieć liczbę cyfr wyrażaiących Pierwiaſtek Sześcianu danego, trzeba od prawey ſtrony zaczynaiąc, oddziały co trzy cyfry kreſkami poczynić; a ile będzie tych oddziałów, tyle też cyfr będzie ſię znaydowało w Pierwiaſtku. Oddział pierwſzy po lewey ſtronie może mieć trzy, dwie, a czaſem i iednę tylko cyfrę, iako to przykłady poprzedzaiące okazuią. I tak Pierwiaſtki ſześcienne liczb 1,331; 32,767; 226,981; maią dwie cyfry.

42. Niechby trzeba z liczby 1331, wyciągnąć pierwiaſtek ſześcienny:

Ta liczba ma dwie cyfry w ſwoim Pierwiaſtku, bo dwa w niey uczynić można oddziały, tym ſpoſobem: 1,331. Naywiękſza liczba dzieſiątków tego Pierwiaſtku taka być powinna, aby iey

Sześcian

Sześcian nie był większy od 1; a zatym będzie tylko ieden dziesiątek w Pierwiastku. Sześcian z 10, iest: 1000; który Sześcian, odiąwszy od 1331, zostanie 331. Ta reszta powinna zamykać w sobie potróyny kwadrat dziesiątka rozmnożony przez iedności; potróyny kwadrat tych iedności, rozmnożony przez dziesiątek, i Sześcian tychże iedności. Aże wszczegulności ta reszta, ma w sobie zamykać kwadrat potroyny dziesiątka rozmnożony przez iedności; wystawmy więc sobie tę resztę 331, iak gdyby zamykała tylko sam potròyny kwadrat z 10, to iest 300. Wieloraz z 331, przez 300 podzielonych, iest: 1, więc iedna iedność będzie w Pierwiastku. Rozmnożywszy 300 przez 1, będzie 300, a te, od 331, odiąwszy, zostanie 31. Ta reszta ma ieszcze w sobie zamykać potróyny kwadrat iedności przez dziesiątek rozmnożony, to iest: 30: i Sześcian iedności, to iest: 1, a zewszystkim 31, ktòre odiąwszy od ostatniey reszty nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek sześcienny liczby 1331, iest: 11.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 68.921. Pierwiastek tey liczby ma dwie cyfry. Liczba dziesiątków ta-

ka

ka być powinna, aby Sześcian iey odiąć można od pierwszego podziału: 68. Aże z Tablicy dziewiąciu pierwszych sześcianów (34) którą uczniowie umieć na pamięć powinni, Sześcian naybliższy 68; iest 64. a tego Pierwiastek iest: 4; więc w Pierwiastku będą 4 dziesiątki. Sześcian z 40, iest: 64000; odiąwszy go od 68921, zostanie 4921. Ta reszta ma wszczegulności zawierać w sobie potróyny kwadrat dziesiątków, rozmnożony przez iedności, to iest ma w sobie zawierać 4800 rozmnożone przez iedności. Dzieląc 4921. przez 4800, wypada 1, na wieloraz, więc będzie w Pierwiastku iedna iedność. Odiąwszy od 4921, kwadrat potróyny 4800. rozmnozony przez 1, zostanie 121. Ta reszta ma ieszcze w sobie zawierać kwadrat potróyny iedności, rozmnożony przez 4 dziesiątki, to iest 120, i Sześcian iedności, to iest 1, a że wszystkim, 121; które odiąwszy od ostatniey reszty, nic nie zostanie; a zatym Pierwiastek zupełny będzie: 41.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z liczby 884,636. Ta też liczba ma dwie cyfry w swoim Pierwiastku. Sześcian naybliższy liczby 884. iest: 729, którego

rego Pierwiastkiem iest: 9, więc Pierwiastek będzie miał 9 dziesiątków. Sześcian z 90, iest 729000; który odiąwszy od 884736, zostanie 155736. Kwadrat z 90, iest 8100, potròyny będzie: 24300. Dzieląc przez 24300, resztę 155736, na wieloraz wypada 6, więc Pierwiastek mieć będzie 6. iedności. Rozmnożywszy 24300 przez 6, będzie 145800, które odiąwszy od 155736, zostanie 9936. Kwadrat potróyny 6 iedności, rozmnożony przez 9 dziesiątków, będzie 9720, odiąwszy go od 9936, zostanie 216, nakoniec Sześcian z 6, iest 216; a zatym Pierwiastek zupełny będzie 96. Jakoż Sześcian z 96, iest: 884,736.

Wyciągniymy Pierwiastek sześcienny z Liczby 590.589,719. Ten powinien mieć trzy cyfry.

Liczba stów w Pierwiastku taka być powinna, aby iey Sześcian, nieprzechodził 590. Z dziewiąciu pierwszych Sześcianów, naybliższy liczby 590 iest Sześcian: 512, którego Pierwiastek; iest 8; a zatym 8 stów będzie w Pierwiastku. Odiąwszy 512000000, od Sześcianu danego, zostanie 78589719. Kwa-

drat

drat potróyny ſtów 8, albo 800, to ieſt 1920000 znayduie ſię razy 40 w tey reſzcie; mogłoby więc zdawać ſię, iż 4 dzieſiątki Pierwiaſtek mieć powinien; aleby nie można od 78589719 odiąć dwóch innych części, to ieſt kwadratu potróynego dzieſiątków rozmnożonego przez ſta, i Sześcianu dzieſiątków; nie można przeto więcey dać Pierwiaſtkowi, iak 3 dzieſiątki. Liczbę 1920000, rozmnożoną przez 30, to ieſt 57600000, odiąwſzy od 78589719, zoſtanie 20989719; od tey reſzty odiąwſzy znowu kwadrat potróyny 3 dzieſiątków, przez ſta rozmnożonych, to ieſt 2160000, zoſtaie 18829719, a po odięciu Sześcianu dzieſiątków, to ieſt 27000, będzie wreście, 18802719, Kwadrat potróyny części Pierwiaſtku znalezioney, to ieſt liczby 830, ieſt 2066700; przez ten dzieląc reſztę 18802719, wypadnie 9 iedności na wieloraz. Odiąwſzy od tey reſzty, liczbę 2066700, rozmnożoną przez 9, to ieſt: 18600300, zoſtanie 202419; zkąd znowu odiąwſzy kwadrat potróyny iedności 9, rozmnożony przez 830, to ieſt 201690, zoſtaie 729. Naoſtatek Sześcian z 9 ieſt: 729, a zatym Pierwiaſtek którego ſzukaliśmy będzie 839.

Wzor

Wzor działań w przykładach poprzedzaiących.

Przykład 1.

```
     1,331.|10.
     1 000 |
     ------
300| 331|1.
   | 300|
   ------
      31.
      30
      ---
       1.
       1
      ---
       0
```

Przykład 2.

```
      68,921|40
      64 000|
      --------
4800| 4 921|1.
    | 4 800|
    ---------
        121.
        120
        ---
          1.
          1
         ---
          0
```

Przykład

Przykład 3.

```
        884.736.|90
        729 000 |
24300| 155736 |6.
     | 145800 |
        9936.
        9720.
         216.
         216.
           0.
```

Przykład 4.

```
          590,589,719,|800
          512 000 000 |
         |78589719|30.
1920000  |57600000|
          20989719.
           2160000
          18829719.
             27000
         |18802719|9
2066700  |18600300|
            202419
            201690
               729
               729
                 0.
```

Więcey takowych przykładów należy podać Uczniom, nie używaiąc ieszcze żadnego skrócenia.

45. Pierwsze skrócenie, na tym zawisło, aby opuszczać zera, w liczbach dzielących, podzielnych, i w wielorazach; maiąc iednak zawsze uwagę na mieysca, które zastępować przypada cyfrom znaczącym. W szczegulności zaś co do wielorazow, będzie tén z opuszczania zerów pożytek, że zaraz przy sobie kłaść będzie można cyfry wyrażaiące Pierwiastek, którego szukamy.

Drugie skrócenie, związane z pierwszym na tym się zasadza, aby do każdego następuiącego dzielenia, tyle tylko cyfr z Sześcianu przyłączać do reszty pozostałey, ile ich wyciągać będzie przypadaiące odeymowanie; daremna albowiem byłaby praca, przy każdym odeymowaniu, wszystkie pozostałe Sześcianu cyfry na nowo wypisywać, ponieważ ostatnie zwłaszcza cyfry przez większą część działania nie naruszone zostaią.

Trzecie skrócenie na tym zawisło, aby za iednym razem odiąć kwadrat potróyny części znalezioney, rozmnożony przez część następuiącą; kwadrat potróyny teyże części drugiey, rozmnożony przez część pierwszą znalezioną, i Sześcian

tey

tey części drugiey. To zaś wykona się, dodaiąc razem te trzy liczby odeymować się maiące, i tak dodane odeymuiąc od Sześcianu, z którego Pierwiastek wyciągamy. Zawsze iednak mieć trzeba na to uwagę, aby w liczbach, które pierwey dodawać, a potym ich summę odeymować mamy, zachowane było mieysce każdey cyfrze właściwe; iako też wzgląd mieć należy na położenie cyfrów tych, od których inne odeymować przypada.

Przystosowanie. Niechby z liczby 257,259,456, trzeba wyciągać Pierwiastek Sześcienny. Ten będzie miał cyfr trzy. Naywiększy Sześcian zawarty w 257, iest 216, którego Pierwiastek iest: 6, odiąwszy ten Sześcian od 257, zostanie 41. Do tey reszty przyłączmy następuiący oddział 259, będzie 41259. Niemaiąc tym czasem względu na ostatnie dwie cyfry: 59, dzielmy 412 przez potróyny kwadrat z 6, to iest przez 108, wieloraz będzie 3. Weźmy teraz summę trzech liczb: 324. 162. 27. to iest kwadratu potróynego z 6. stów rozmnożonego przez 3 dziesiątki, kwadratu potróynego z 3 dziesiątków rozmnożonego przez 6. stów, i Sześcianu z 3 dziesiątków. Summę

mę 34047 odeymiymy od 41259, zoftanie 7212; przy których przypifawfzy oftatni oddział 456, będzie 7212456. Nie uważaiąc tym czafem na oftatnie dwie cyfry, dzielmy 72124 przez kwadrat potróyny z części Pierwiaftku znalezioney, to ieft przez 11907, wypadnie 6, na wieloraz. Weźmy fummę trzech liczb: 71442, 6804, 216 to ieft kwadrat potroyny części pierwey znalezioney, rozmnożony przez 6 iedności, kwadrat potróyny z 6. iedności rozmnożony przez część pierwey znalezioną, i Sześcian z 6. iedności. Summa 7212456 równa fię refzcie oftatniey; co znakiem ieft że Pierwiaftek, którego fzukaliśmy, ani mnieyfzy ani większy ieft, iak 636.

To działanie bardziey długie, niż trudne, wyciąga od uczniów częftego w nim ćwiczenia fię.

44. Aby wyciągnąć Pierwiaftek Sześcienny z ułomku, którego tak licznik, iako i mianownik ieft Sześcianem; trzeba go ofobno wyciągać z każdego z tych wyrazów. I tak Pierwiaftek fześcienny z $\frac{125}{216}$, ieft: $\frac{5}{6}$. Pierwiaftek z $\frac{64}{343}$. ieft: $\frac{4}{7}$. Aby zaś wyciągnąć Pierwiaftek Sześcienny z liczby mieszaney,

trzeba

trzeba ią pierwey zamienić na ułomek. I tak Pierwiastki sześcienne liczb mieszanych $3\frac{3}{8}$, $37\frac{1}{27}$, są te same co i ułomków $\frac{27}{8}$, $\frac{1000}{27}$. to iest: $\frac{3}{2}$. $\frac{10}{3}$, albo $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$.

45. Co się o Pierwiastku kwadratowym powiedziało (w Części 1. Geom: § 128) ściąga się i do Pierwiastku sześciennego; to iest; że ieżeli nie można mieść Pierwiastku Sześciennego liczby całkowitey, w liczbach całkowitych, tedy go i w ułomkach nie znaydziemy. Dowodzi się to ogulnie tymże samym, iak względem Pierwiastku kwadratowego sposobem. (d)

46. Pierwiastek Sześcienny liczby iakiey, można tak do prawdziwego przybliżyć, iak tylko zechcemy. Sposob nayogulnieyszy iest, używaiąc do tego ułomków dziesiątnych. Niechby naprzykład trzeba z 2 wyciągnąć Pierwiastek

---

(d) Otoż i drugi rodzay ilości niespółmiernych. Pierwszego rodzaiu ilości niespółmierne można Geometrycznie wyrazić; lecz wyrazenie tych drugich, wyższey nad początkową nauki potrzebuie.

ftek ześcienny, przybliżaiąc go do prawdziwego w cząftkach tyfiącznych. Wyciągaymy ten Pierwiaftek, fposobem dopiero podanym, z liczby 2000000,000, a oftatnie trzy tego Pierwiaftku cyfry połozmy za dziefiątne. Pierwiaftek Sześcienny liczby: 2000000000 w liczbach całkowitych naybliżfzych wyrażony, ieft: 1259; a zatym Pierwiaftek Sześcienny liczby 2, przybliżony aż do części tyfiącznych iedności będzie 1,259. Jakoż Sześcian z 1,259, ieft: 1,995616979 mnieyfzy od 2, a Sześcian 1,26, ieft: 2,259576, większy od 2.

47. Chcąc Pierwiaftek fześcienny liczby nap: 2, przybliżyć do prawdziwego, w ułomkach zwyczaynych, podwoiwszy pierwfze dziewięć Sześcianów liczb *naturalnych*. 1,2,3.4. i t. d. uważać należy (podobnie iako fię o przybliżeniu Pierwiaftku kwadratowego w Części I. powiedziało:) ieżeli między temi Sześcianami podwoionemi, nieznayduie fię taki, któryby blifki bardzo był Sześcianu zupełnego. Znaydziemy nap: że 64. podwoione, to ieft 128, mało fię co różni od 125. to ieft od Sześcianu liczby 5; a zatym 2, które równa fię całe $\frac{128}{64}$; będzie też prawie równe $\frac{125}{64}$;

przeto

przeto i Pierwiaſtek Sześcienny liczby 2, będzie prawie równy $\frac{5}{4}$. Aby zaś poprawić ten pierwszy mniey dokładny Pierwiaſtek Sześcienny, podzielemy rożnicę między $\frac{128}{64}$ i $\frac{125}{64}$, to ieſt, $\frac{3}{64}$., przez kwadrat potróyny tego pierwſzego Pierwiaſtku to ieſt przez $\frac{75}{16}$, i wieloraz $\frac{1}{100}$, dodamy do Pierwiaſtku $\frac{5}{4}$; Summa $\frac{126}{100}$, będzie Pierwiaſtkiem bardziey przybliżonym. Jakoż Sześcian z $\frac{126}{100}$ ieſt. $2\frac{376}{1000000}$; a i to uchybienie możnaby ieſzcze zmnieyszyć podobnym iak wyżey ſpoſobem.

Niechby z liczby 3, trzeba wyciągnąć Pierwiaſtek ſześcienny przez przybliżenie.

Liczba 3, równa ſię zupełnie $\frac{1029}{343}$, a niewiele ſię różni od $\frac{1000}{343}$; a zatym Pierwiaſtek Sześcienny liczby 3, będzie prawie równy $\frac{10}{7}$, a poprawuiąc to pierwſze uchybienie, Pierwiaſtek bardziey do prawdziwego przybliżony będzie $\frac{3029}{2100}$.

48. Gdy ani licznik ani mianownik iakiego ułomku, nie ieſt Sześcianem; trzeba obadwa te wyrazy rozmnożyć przez taką liczbę, aby po rozmnożeniu,

F [illegible] miano-

mianownik stał się Sześcianem; potym dopiero wyciąga się Pierwiastek z licznika, przez przybliżenie, a wyciągniony, dzieli się przez Pierwiastek zupełny mianownika. I tak chcąc wyciągnąć Pierwiastek sześcienny z $\frac{1}{4}$; zamieniam ten ułomek na $\frac{2}{8}$; a wyciągnąwszy z 2, przez przybliżenie Pierwiastek sześcienny: 1,259. -- biorę iego połowę 0,629 - - -; to iest: dzielę go przez Pierwiastek sześcienny mianownika 8; Podobnie Pierwiastek Sześcienny z $\frac{5}{12}$, ten sam iest, co i Pierwiastek Sześcienny z $\frac{90}{216}$; to iest $\frac{1}{6}$. Pierwiastku sześciennego z 90.

ROZDZIAŁ III.

O Równoległościanach prostokątnych (e).

49. *D*Efin: Gdy Bryła iaka zakończona iest sześcią ścianami prostokątnem, taka Bryła nazywa się, *Rowno-legło-*

(e) *Częste używanie Równoległościanów prostokątnych iest nam pobudką do mówienia o nich w szczegulności: tum bardziey, że przez to przysposobią się Uczniowie do zamieniania z większą łatwością innych nie prostokątnych Rowno ległościanów na prostokątne.*

ległościanem prostokątnym (Parallelopipedum Rectangulum).

50. *Twierdz.* 1. W każdym Równoległościanie prostokątnym, Sciany na przeciwko siebie stojące, są równe i równoodległe; a każda z tych ścian w szczególności prostopadłą iest, do każdey z czterech innych ścian, które z nią spolny maią bok ieden.

Niech będzie ABCDEFGH, Równoległościan prostokątny; spolne dwóch ścian: GBCF, GBAH przecięcie GB, prostopadłym iest do dwóch innych boków: BC, BA należących do tychże Scian, więc to przecięcie iest też prostopadłym i do płaszczyzny przechodzącey przez linie AB, BC, to iest do ściany ABCD. Płaszczyzny zatym ABGH, BCFG, które przechodzą przez to spolne przecięcie GB, są do ściany ABCD, prostopadłe. Toż mówić i o dwóch drugich ścianach, których spolnym przecięciem iest liniia ED; a zatym cztery ściany Równoległościanu prostokątnego, są prostopadłe do tey ściany, z którą maią po iednym boku spolnym. Tab. II. Fig. 4.

Dowiedliśmy że liniia GB, prostopadłą iest do ściany ABCD. Podobnie do-

 wieść-

wie by można, że taż liniia ieft proftopadłą i do ściany GFEH; więc te obie ściany fą proftopadłe do iedney linii GB, a zatym fą od fiebie równoodległe.

Na oftatek w Proftokącie ABGH liniie przeciwno AB, GH fą równe; iako też i liniie BC, FG, a zatym dwie przeciwne ściany ABCD, EFGH, mogą przyftać do fiebie.

51. *Uwaga.* Ponieważ w Równoległościanie proftokątnym z czterech ścian otaczaiących ten Równoległościan, każda ma ieden bok fpólny z bokiem iedney ściany z dwóch pozoftałych; przeto można wyftawić fobie *rodzenie fię* (generatio albo formatio) Równoległościanu proftokątnego, w fposob naftępuiący.

Niech będzie Proftokąt iakikolwiek, na którego wierzchołkach wszyftkich wyftawione fą proftopadłe do iego płafzczyzny wfzyftkie równe. Niech ten Proftokąt pofuwa fię równoodlegle od pierwfzego fwego położenia, i tak, aby wierzchołki kątów iego wzdłuż liniy proftopadłych wznofiły fię. Mieyfce to, które takowym pofuwaniem fię przey-

przeydzie Proſtokąt, będzie Równoległościanem proſtokątnym.

52. *Defin:* Równoległościan proſtokątny, którego wſzyſtkie ściany ſą kwadratami, nazywamy *Sześcianem*, albo z Łacińſkiego, *Kubusem*.

Sześcian więc, ieſt to Bryła zakończona ſześcią kwadratami. Wypływa zaś z Twierdzenia poprzedzaiącego, że te 6. kwadratów, ſą równe, że każde z nich dwa, na przeciwko ſiebie ſtoiące, ſą rownoodległe, i że cztery z tych kwadratów wspieraiące ſię na czterech bokach kwadratu iednego z dwóch kwadratów pozoſtałych, ſą do tego kwadratu proſtopadłe.

Wyſtawiwszy ſobie Równoległościan proſtokątny, iako zbudowany na iedney z ścian ſwoich, proſtopadła ſpuszczona na tę ścianę, od punktu któregokolwiek ściany przeciwney, nazywa ſię *wysokością* tego Równoległościanu. Ta zaś wysokość równa ieſt ſpolnemu przecięciu dwóch ścian zbudowanych na dwóch przyległych ſobie bokach podſtawy.

53. *Twier:*

53. *Twierdz.* 2. Gdy podſtawy dwóch Równoległościanów mogą przyſtać do ſiebie, a ich wysokości ſą równe, te dwa Równoległościany, mogą też przyſtać do ſiebie, to ieſt nie różnią ſię od ſiebie tylko mieyſcem.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany tych dwóch Równoległościanów, podobnie położone, mogą przyſtać do ſiebie; wſzyſtkie też tych Równoległościanów kąty bryłowe, ſkładaią ſię z trzech kątów proſtych, a zatym wszyſtkie te kąty bryłowe mogą przyſtać do ſiebie. Przenioſzſzy tedy myślą ieden z tych Równoległościanów, tak, aby ieden z kątów iego bryłowych, przyſtał do iednego z kątów bryłowych Równoległościanu drugiego, i aby ściany pierwſzego kąta, które mogą przyſtać do ścian drugiego, w ſamey rzeczy do niego przyſtały, wſzytkie końce krawędzi pierwſzego kąta, przyſtaną do końców krawędzi odpowiadaiących przy drugim kącie; a przeto i wierzchołki kątów bryłowych pierwſzego Równoległościanu, które ſą przy końcach tych krawędzi, przypadną na wierzchołki kątów bryłowych drugiego Równoległościanu, będące przy końcakch tychże ścian odpowiadaiących

54.

pierwszym; zatym i te kąty bryłowe przyſtaną iedne do drugich.

54. *Wniosek.* Podzieliwszy wyſokość iakiego Równoległościanu proſtokątnego na pewną liczbę części równych, a przez te wszyſtkie punkta podziału przeciągnąwſzy płaszczyzny rownoodległe od podſtawy; Równoległościan podzielony będzie na tyle Równoległościanów mnieyszych, które przyſtać do ſiebie mogą, na ile części była podzielona wysokość; będą albowiem miały te wszyſtkie Równoległościany mnieysze, iednakową wyſokość, a takie podſtawy, z których każda przyſtać może do podſtawy wielkiego Równoległościanu.

55. *Twierdz;* 3. Dwa Równoległościany proſtokątne, wyſtawione na teyże ſamey podſtawie, lub na podſtawach mogących przyſtać do ſiebie, tak ſię mają ieden do drugiego, iak ich wysokości.

Dowodz: 1. Gdyby wyſokość iednego, Równoległościanu, była dwa, trzy, cztery i t. d. razy większa od wysokości drugiego, pierwszy Równoległościan, mógłby ſię podzielić na 2, 3, 4, i t. d.

i t. d. Równoległościany mogące przystać do drugiego; a zatym ten pierwszy Równoległościan byłby też większy od drugiego, 2, 3, 4, i t. d. razy, Co przystosować można, i w innych przypadkach, gdzieby tylko wysokość iednego Równoległościanu zawierała w sobie zupełnie wysokość drugiego.

2. Gdyby zaś wysokość iednego Rownoległościanu zawierała nap. 3. takich części; iakich 5 zawiera wysokośc drugiego; w takim razie, podzieliwszy pierwszą wysokość na trzy, a drugą na pięć równych części, a przez punkta podziału przeciągnąwszy płaszczyzny równoodległe od podstaw, podzielilibyśmy pierwszy Równoległościan na 3, a drugi na 5. Ròwnoległościanów iednakowey wysokości, i których podstawy przystaćby mogły do siebie; a zatym pierwszy Równoległościan takby się miał do drugiego iak 3, do 5, to iest iak wysokość pierwszego do wysokości drugiego. Rozumowanie to służy i do innego iakiegokolwiek stosunku.

Na koniec, to, co się powiedziało w przypadkach społmiernych, przystosować można i do przypadków nie społmier-

miernych, tak iakośmy uczynili mówiąc o figurach płaskich, w Części 1.

Jakoż niech będą AB, CD wysokości dwóch Równoległościanów prostokątnych, zbudowanych na teyże samey podstawie, albo na podstawach mogących do siebie przystać; i niech te wysokości będą niespółmierne; wszelako dwa takie Równoległościany mieć się do siebie będą, iak ich wysokości. Tab. II. Fig: 5.

Gdyby albowiem stosunek tych dwóch Równoległościanów nie był równy stosunkowi ich wysokości, tedy iedna z tych wysokości, byłaby nadto mała do uczynienia tey równości stosunków. Niechże więc ieżeli to być może, stosunek pierwszego Równoległościanu, do drugiego, będzie równy stosunkowi linii AE, (większey od AB) do CD.

Podzielmy liniią CD na pewną liczbę części równych mnieyszych iednak od różnicy BE, i przenieśmy iednę z tych części na liniią AB; tyle razy, ile można; ostatni punkt podziału padnie między A i B, a przeniozłszy daley ku E, iednę ieszcze taką część, punkt podziału padnie między B i E, nap. w F.

Ro-

Rownoległościany maiące iednakowe podſtawy, a wysokości ſpółmierne CD, i AF, będą do ſiebie iak te wysokości CD i AF.

Aże (przez przypuszczenie) Równoległościan, którego wysokością ieſt AB, tak ſię ma do Równoległościanu, którego wysokością ieſt CD, iak ſię ma liniia AE do linii CD.

Więc (przez złożenie ſtoſunków) Rownoległościany, których wyſokościami ſą AB, i AF. miałyby ſię do ſiebie, iak liniie AE, i AF, Że zaś pierwszy poprzednik mnieyszy ieſt od ſwego naſtępnika, a drugi poprzednik większy od ſwego naſtępnika, więc proporcya ta niema mieysca, a zatym ſtoſunek Równoległościanów, których AB, i CD, ſą wysokościami, nie ieſt różnym od ſtoſunku tychże wysokości.

To ſamo w krótkosci tak ſię wyraża: Niech będą oznaczone przez R.AB,R.AF, R.CD, Równoległościany maiące iednakowe podſtawy, wysokości zaś: AB AF, CD.

Gdyby można uczynić tę proporcyą:

R. AB: R. CD=AE: CD.

tedy ponieważ ieſt; - - R. CD: R. AF=CD: AF.

byćby powinno - - R. AB: R. AF=AE: AF.

Ta zaś oſtatnia proporcya utrzymać ſię nie może, więc ani pierwſza.

56. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany, maiące iednakowe wysokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy.

Przenieśmy ieden z tych Równoległościanów, tak, aby podſtawa iego ſtykała ſię w wierzchołku ſpolnym, z drugą podſtawą. Niech ABCD będzie iedną z tych podſtaw, a drugą: EBGF. Dopełniymy Proſtokąta, CBGH przedłużywszy boki, DC, FG, aż do ich ſpolnego przecięcia, w punkcie H; i wyſtawmy ſobie wmyśli Równoległościan trzeci ſtoiący na podſtawie CBGH, dawszy mu wyſokość równą wysokości, iednakowey dwóch danych Równoległościanów. Równoległościan, którego podſtawa ieſt: ABCD, i ten, którego podſtawa ieſt: CBGH, wyſtawuiąc ie ſobie iak gdyby miały za podſtawę proſtokąt, którego iednym bokiem byłaby liniia CB, a drugim, wysokość ſpolna obydwóch danych Równoległościanów; te mowię Równoległościany ſą do ſiebie iak ich wysokości AB, i BG, albo iak Proſtokąty ABCD i CBGH. *Tab: II. Fig. 6.*

Podobnie Równoległościany, których, CBGH, i BEFG. ſą podſtawami, uważane,

ne, iak gdyby miały za podstawę Prostokąt, którego iednym, bokiem byłaby liniia BG, a drugim spolna wysokość dwóch danych Równoległościanów są także do siebie, iak ich wysokości, BC, BE, albo iak Prostokąt, CBGH, do Prostokąta BEFG.

Więc (przez złożenie stosunków) Równoległościan, którego podstawą iest ABCD, tak się ma do Równoległościanu, którego podstawą iest BEFG, iak się ma pierwsza podstawa do drugiey.

Króciey to samo.

Niech Równoległościany, których podstawami są Prostokąty: ABCD, CBGH, BEFG, będą oznaczone wyrazami następuiącemi: R. ABCD, R. CBGH, R. BEFG.

1. proporcya,

R. ABCD : R. CBGH = ABCD : CBGH.

2. proporcya;

R. CBGH : R. BEFG = CBGH : BEFG.

---

więc

R. ABCD : R. BEFG = ABCD : BEFG.

57. Wnio-

Wniosek 1. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią równe tak wysokości, iak i podstawy, są równe; także, ieżeli równe dwa Równoległościany prostokątne, maią równe podstawy, równe będą i ich wysokości; albo ieżeli równe maią wysokości, równe będą i ich podstawy.

58. *Wniosek* 2. Można zawsze zamienić, albo w myśli zamienionym sobie wystawić Równoległościan ieden prostokątny, na drugi, iednakową z nim wysokość maiący, a któryby za podstawę miał Prostokąt, z iednym bokiem danym; to się zaś stanie, zamieniaiąc podstawę Równoległościanu danego, na Prostokąt, w któryby wchodził ten bok dany.

59. *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany prostokątne, ieżeli maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe; i wzaiemnie, ieżeli dwa Równoległościany są równe, będą podstawy ich, w stosunku odwrótnym ich wysokości.

Niech będzie ABCD podstawa, a BI wysokość Równoległościanu iednego *Tab. II. Fig. 6.*

Prosto-

proftokątnego; drugiego zaś Równoległościanu niech będzie podftawa BEFG, a wysokość BL.

1. Niech zachodzi ta między podftawami y wysokościami proporcya:

ABCD : BEFG = BL : BI, tedy te Równoległościany będą równe.

Wyftawmy fobie drugi Równoległościan, iakoby zamięniony na inny teyże famey wysokości BL, a maiący za ieden bok fwoiey podftawy, bok nap: BC, należący do podftawy pierwfzego Równoległościanu, i niech będzie tego nowego Równoległościanu podftawa CBMN.

Będzie zatym podftawa ABCD do podftawy BEFG. iak AB do BM; a żeśmy też przypuścili ABCD : BEFG = BL: BI, więc będzie AB: BM = BL: BI, a zatym Proftokąt maiący za boki, AB, BL. równy będzie Proftokątowi maiącemu za boki: BM, BL: Ze zaś pierwszy i trzeci Równoległościan maią za podftawy te dwa równe Proftokąty, i fpolną przytym maią wysokość BC, więc fą fobie równe. Aże trzeci Równoległościan równy ieft drugiemu, wiec i pierwszy równy także będzie drugiemu.

2. Niech

2. Niech Równoległościan, którego ABCD ieſt podſtawą, a BI wysokością, będzie równy Równoległościanowi, którego podſtawą ieſt BEFG: a wyſokością BL; idzie zatym że, ABCD: BEFG = BL: BI.

Zrobmy to ſamo co wyżey wykreślenie.

Uważaiąc pierwszy i trzeci Równoległościan, iako maiące za wysokość ſpolną, BC, będzie pierwszy do trzeciego iak Próſtokąt AB × BI do Proſt: BM × BL. Aże te dwa Równoległościany ſą (przez przypuszczenie, albo wykreślenie) równe drugiemu, więc i ſobie ſą równe, więc AB × BI = BM × BL; a zatym AB: BM = BL: BI. Ze zaś AB: BM = ABCD : CBMN = ABCD : BEFG; więc ABCD: BEFG = BL : BI.

60. *Wniosek.* Z tego wszyſtkiego co ſię powiedziało, wynika ſposob znalezienia dwóch liniy, któreby były do ſiebie w ſtosunku dwóch Równoległościanów zawieraiących boki dane.

Przykład. Maiąc dany Sześcian i Równoległościan proſtokątny, znaleść liniią taką, aby ſtosunek Sześcianu do Ró-

wnole-

wnoległościanu równy był ſtosunkowi boku Sześcianu do tey linii.

Niech będzie S bok Sześcianu, P,Q;R, boki trzy Rownoległościanu. Zamieńmy nayprzod Prostokąt, ktorego bokami ſą P, i Q na inny, ktoryby miał za bok ieden, bok Sześcianu; to ieſt ſzukaymy czwartey proporcyonalney do S, P, i Q; Niech będzie L, tą czwartą proporcyonalną. Równoległościan dany, równy będzie innemu, ktoryby miał za boki: S,L,R; a zatym ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu danego, równać ſię będzie ſtosunkowi kwadratu S^2 do Proſtokąta $L \times R$. Zamieńmy znowu ten drugi Rownoległościan równy danemu, na inny, ktoryby znowu miał S za bok ieden, to ieſt ſzukaymy czwartey proporcyonalney do S, L, i R. Niech będzie M, tą czwartą proporcyonalną: Równoległościan drugi, a zatym i pierwszy dany, iemu rowny, równać ſię będzie trzeciemu, ktoryby miał za boki: S, S, M; więc ſtosunek Sześcianu do Rownoległościanu danego, równać ſię będzie ſtoſunkowi kwadratu S^2 do proſtokąta $S \times M$, to ieſt ſtosunkowi S, do M.

Aby tedy znaleść w liniiach, ſtosunek Sześcianu do Równoległościanu, proſto- kątne-

kątnego, trzeba 1°. do boku Sześcianu, i do dwóch boków Równoległościanu szukać czwartey proporcyonalney; 2°. trzeba znowu do tegoż boku trzeciego, Równoległościanu, i do czwartey proporcyonalney dopiero znalezioney, szukać inney czwartey proporcyonalney; a stosunek boku Sześcianu, do tey ostatniey linii, równy będzie stosunkowi Sześcianu do Równoległościanu.

Idzie zatym, że ieżeli mamy dwa Równoległościany prostokątne, będziemy mogli wyrazić w liniiach ich stosunek, szukaiąc w liniach stosunku tychże Równoległościanów do iakiego Sześcianu; wziąwszy albowiem bok tego Sześcianu, za poprzednika, każdego z tych stosunków; stosunek ich następników, wyrażać będzie stosunek w liniiach, tych dwóch Równoległościanów.

61. *Uwaga.* Wszystko to, co się powiedziało o przyrównywaniu, albo mierze Geometryczney Równoległościanów prostokątnych, zgadza się zupełnie z nauką podaną w Arytmetyce o przyrównywaniu liczebnym Równoległościanów.

Przykł. Niech iedność wyraża bok Sześcianu wziętego za miarę do przyrównywania; a niech boki Równoległościanu, który chcemy do Sześcianu przyrównywać, zawieraią ten bok Sześcianu kilka razy oznaczonemi przez liczby nap. 5, 7, i 9. Czwarta proporcyonalna do boku Sześcianu, i do dwóch pierwfzych boków Równoległościanu wyrazi się przez liczbę 35, to ieft zawierać będzie bok Sześcianu, razy 35; czwartą zaś drugą proporcyonalną, do tegoż boku Sześcianu, do trzeciego boku Równoległościanu i do pierwfzey czwartey proporcyonalney, wyrazi liczba 315; to ieft zawierać ta będzie bok fześcianu, razy 315. A zatym Równoległościan, zawierać będzie w fobie Sześcian razy 315; to ieft, wziąwfzy Sześcian za iedność albo fpolną miarę; ten Równoległościan wyrazi się przez liczbę 315, która podług wykreślenia pochodzi z rozmnożenia liczb 5. 7, i 9.

62. *Defin.* Gdy cztery takie mamy liniie, że ftofunki, pierwfzey do drugiey, drugiey do trzeciey, trzeciey do czwartey fą równe, o takich liniiach mowi się, że fą *ciągło* (continuè) proporcyonalne.

Przykłady

Przykłady liczebne: Cztery liczby: 1,2.4,8, nazywaią śię ciągło proporcyonalnemi, a cztery linije, któreby tak śię do śiebie miały, iak te cztery liczby nazywałyby śię też ciągło proporcyonalnemi. Toż mowić i o liczbach, 8,12,18.27, z których każda zawiera w sobie, poprzedzaiącą ieden raz i pół, i t. d.

Stosunek pierwszey z tych linii, do czwartey, składa śię z stosunku, pierwszey do drugiey, drugiey do trzeciey, i trzeciey do czwartey (a to przez definicyą stosunku składanego). Że zaś wszystkie te szczególne stosunki są równe, więc stosunek pierwszey tey linii do czwartey, składa śię z 3 stosunków równych, ma zaś nazwisko stosunku *troymnożnego* (ratio triplicata) i pierwsza ta liniia do czwartey, będzie w stosunku tróymnożnym.

63. *Przystosowanie.* Niechby Równoległościan, który wymierzać mamy przez Sześcian wzięty za iedność, był i on sam Sześcianem.

Niech będzie AB bok Sześcianu maiącego służyć za miarę; AC bok Sześcianu który wymierzyć mamy. Szukaymy do AB, i AC, trzeciey proporcyonalney AE Tab. II. Fig. 7.

 (kreśląc

(kreśląc Tróykat proſtokątny ABC, maiący, AB za iedno ramie kąta proſtego, a AC za przeciwproſtkątną; i wyſtawuiąc do linii AC, w punkcie C, proſtopadłą CE, aż do iey ſpotkania ſię w E, z liniią AB przedłużoną) Szukaymy daley do AB, AC, AE, czwartey proporcyonalney, AF) wyprowadzaiąc od punktu E linii AE, proſtopadłą EF, aż do iey ſpotkania ſię w punkcie F z linią AC przedłużoną) Pierwſzy Sześcian, wzięty za miarę, tak ſię będzie miał do Sześcianu, który wymierzać przypada, iak liniia AB, do linii AF; to ieſt: iak liniia pierwſza do czwartey z liniy ciągło proporcyonalnych; z których pierwſzych dwóch iedna ieſt bokiem Sześcianu wziętego za miarę, a druga bokiem Sześcianu wziętego do wymierzenia; a zatym ſtoſunek pierwſzego Sześcianu do drugiego ieſt tróymnożnym ſtoſunku ich boków.

I tak, ieżeli bok Sześcianu iakiegoś trzy razy zawiera w ſobie bok Sześcianu wziętego za miarę, Sześcian pierwſzy będzie do drugiego, iak 3 × 3 × 3 do 1. albo iak 27, do 1; to ieſt ieżeli liniia AC zawiera w ſobie razy trzy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie trzy razy liniią AB; liniia też AE zawierać będzie razy 3

liniią

liniią AC, a zatym 9 razy liniią AB, a liniia AF zawierać będzie 3 razy liniią AE, a tym ſamym 27 razy liniią AB.

64. *Wzaiemnie.* Gdy trzeba znaleść Sześcian, któryby do drugiego był w ſtoſunku danym, i takim, któryby ſię równał ſtoſunkowi boku Sześcianu tego drugiego, do linii daney; bok Sześcianu, którego ſzukamy, ma być drugą liniią z czterech ciągło proporcyonalnych, między któremi pierwſza z czwartą, ſą w danym ſtoſunku; to ieſt: bok ten ſzukany, ma być liniią pierwſzą z dwóch średnich ciągło proporcyonalnych między pierwſzą i czwartą.

Zagadnienie to, nie może być rozwiązane przez Geometryą początkową, chyba treſunkiem przez doświadczanie i ſzukanie nie pewne; do dokładnego i pewnego rozwiązania, potrzeba iedney przynaymniey z liniy krzywych, nazwanych *przecięciami konicznemi* (ſectiones conicæ) o których ſię potym namieni. I toć to zagadnienie o znalezieniu dwóch średnich proporcyonalnych, pierwſzym powodem być muſiało Geometrom, do uważania, tych liniy krzywych dopiero wſpomnionych, i do uczynienia pierwſze-

go

go kroku w wyższey Geometryi. Gdy się w *Delos* radzono Wyroczni, coby za sposób był ziednania Bogów zagniewanych, i odwrócenia zarazy powietrza niszczącego Państwo Attyckie; miał się dać głos słyszeć: aby *dwumnożono ołtarze* (Duplicentur Altaria). Po wielu niepożytecznych zawodach, postrzeżono nakoniec, iż trzeba było znaleść bok Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak drugi wzięty za spolną miarę; to iest: iż trzeba było wynaleść pierwszą z dwóch średnich Geometrycznych, między dwiema liniiami, z których iedna dwa razy w sobie zamykałaby drugą.

65. W Arytmetyce; gdy stosunek dany, iest stosunkiem liczby iedney Sześcienney, do drugiey także Sześcienney, rozwiązać można dokładnie to zagadnienie. Tak nap: gdyby dwa Sześciany miały być do siebie, iak 1. do 8; albo iak 1 do 27, albo iak 8 do 27. i t. d. boki ich byłyby ieden do drugiego, iak 1. do 2, albo iak 1. do 3, albo iak 2, do 3. i t.d.

Ale gdy stosunek dany nie iest stosunkiem dwóch liczb Sześiennych, rózwiązanie będzie tylko do prawdziwego przybliżone. I tak, gdy Sześcian ieden,

ma

ma być dwa razy tak wielki, iak drugi, wziąwſzy bok tego drugiego, za iedność, bok pierwſzego powinienby być wyrażony przez liczbę taką, którey Sześcianem, ieſt 2; a zatym pierwiaſtek Sześcienny, liczby 2, wyrażałby ten bok; Pierwiaſtek zaś ten przybliżony, ieſt 1,26 to ieſt bok mnieyſzego Sześcianu, tak by ſię miał do boku Sześcianu dwa razy tak wielkiego, iak 1, do 1,26, albo iak 100, do 126. albo ieſzcze dokładniey iak 23, do 29.

66. *Uwaga.* Gdy ſtoſunek dwóch liniy ieſt dany; dany ieſt tym ſamym i ſtoſunek ich Sześcianów.

Tak albowiem mieć ſię będą do ſiebie te Sześciany, iak liniia pierwſza do czwartey ciągło proporcyonalney, wziąwſzy za pierwſze dwa wyrazy tey proporcyi dwie liniie których ſtoſunek ieſt dany.

Zkąd wypada wnioſek naſtępuiący:

67. Gdy cztery liniie ſą w proporcyi, ich Sześciany w proporcyi też będą; to ieſt; gdy ſtoſunek dwóch pierwſzych liniy równa ſię ſtoſunkowi dwóch drugich; ſtoſunek też Sześcianów z dwóch

pier-

pierwſzych liniy, równać ſię będzie ſtoſunkowi Sześcianów z dwóch drugich liniy.

W Arytmetyce: cztery licz: 2, 3, 8, 12 ſkładaią proporcyą
ich Sześciany: - - 8, 27, 512, 1728, ſkładaią także proporcyą.

68 *Uwaga*. Podanie zamknięte w tym wnioſku, ieſt tylko wyſzczegulnieniem podania naſtępuiącego:

Niech będą trzy iakiekolwiek proporcye, i cztery takie Równoległościany proſtokątne; aby krawędzie pierwſzego Równoległościanu, były trzema poprzednikami trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie drugiego, trzema naſtępnikami tychże trzech pierwſzych ſtoſunków, krawędzie trzeciego, trzema poprzednikami, trzech drugich ſtoſunków, a krawędzie czwartego, trzema naſtępnikami tychże trzech drugich ſtoſunków; ſtoſunek pierwſzych dwóch Równoległościanów równy będzie ſtoſunkowi dwóch oſtatnich.

Trzeba nayprzod to podanie obiaśnić na przykładach liczebnych.

W ogul

W ogulności zaś niech będą trzy iakiekolwiek proporcye: A : B = C : D.

a : b = c : d.

a : *b* = *c* : *d*.

Zamieńmy stosunek A do B na inny *b* do czwartey linii *E*: Zamieńmy podobnie i stosunek C do D na inny d, do czwartey linii *e*.

Będą podstawy drugiego i czwartego Równoległościanu równe prostokątom B × b, i, D × d ; a zatym podstawy dwóch pierwszych Równoległościanów będą się miały, do siebie iak a do *E*. a podstawy zaś dwóch drugich Równoległościanów będą się miały do siebie iak c do *e*.

Aże przez przypuszczenie i wykreślenie stosunki ; A do B. b do *E*, C do D, d do *e*, są wszystkie równe,

więc - - - b : *E* = d : *e*.

Ze zaś - a : b = c : d

więc a : *E* = c : *e*.

A zatym stosunek podstaw Równoległościanów dwóch pierwszych, równy ieśt

ieſt ſtoſunkowi Równoległościanów dwóch drugich.

Jeſt też z przypuſzczenia;

$a : b = c : d$

więc Proſtokąty aa, E*b*, cc, c*d* ſkładaią proporcyą; a zatym cztery Równoległosciany; któreby te Proſtokąty miały za podſtawy, i z których dwa pierwſze miałyby ſpolną wyſokość A, dwa zaś drugie wyſokość C, byłyby także z ſobą w proporcyi, A że pierwſzy z tych Równoległościanów miałby za krawędzie trzy linie: A, a, *a*, drugi zaś równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie trzy linie: B, b, *b*: a to dla tego, że ſą równe Proſtokąty: B × b i A × E) trzeci z tych Równoległościanów miałby za krawędzie, trzy linie; C, c, *c*, a czwarty równałby ſię temu, któryby miał za krawędzie, trzy linie: D, d, *d*; więc te cztery Równoległościany byłyby w proporcyi.

RO-

ROZDZIAŁ IV.

O Równoległościanach nie prostokątnych.

69. DEfin: Bryła zakończona 6 ścianami parzysto równoległemi, nazywa się *Równoległościanem* a zatym Równoległościany prostokątne, o których w Rozdziale poprzedzaiącym mowa była, są pewnym gatunkiem Równoległościanów.

70. *Twierdz.* 1. W Równoległościanie, wszystkie ściany są Równoległobokami; każde zaś dwie ściany przeciwne, mogą przystać do siebie.

Niech będzie Równoległościan ABCDEFGH; wszystkie iego ściany są Równoległobokami, a ściany przeciwne nap: ABCD, EFGH mogą do siebie przystać. *Tab. III Fig. 1*

Dowodz: Ponieważ płaszczyzny równoodległe ABCD, GHFE, są przecięte trzecią płaszczyzną BGFC, więc ich spólne przecięcia BC, FG z tą płaszczyzną, są równoodległe. Także pokazać można, że linije HE, GF są równoodległe, i linije: HG, EF równoodległe; a zatym że

że ściana HGFE ieſt Równoległobokiem. Podobnie i wſzyſtkie inne ściany ſą także Równoległobokami.

W ſzczególności zaś, liniie: BA, GH, i liniie BC, GE, ſą od ſiebie równoodległemi; więc równe ſą kąty ABC, HGF. Aże te liniie BA, GF, i BC, GF ſą równe, więc Równoległoboki, ABCD, HGFE, mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić o każdey inney parze ścian przeciwnych,

71. Ztąd też wyſtawić ſobie można każdy Równoległościan, iakoby utworzył ſię naſtępuiącym ſpoſobem:

Niech będzie iakikolwiek Równoległobok; a od iednego z iego wierzchołków wyciągniymy liniią czyniącą z iego płaſzczyzną, kąt iakikolwiek ;wyciągniymy potym i przez drugie wierzchołki, liniie równoodległe od pierwſzey, i zrobmy wſzyſtkie ſobie równemi. Niech nakoniec ten Równoległobok poſuwa ſię równoodlegle od pierwſzego ſwego położenia, i niech wierzchołki iego nie ſchodzą nigdy z liniy równoodległych, mieyſce od Rownoległoboków, tym ſpoſobem przebyte, będzie Równoległościanem.

72. *Twierdz*.

72. *Twierdz.* 2. Dwa Równoległościany mogą przyſtać do ſiebie, gdy i wſzyſtkie ich odpowiadaiące ſobie ściany przyſtać do ſiebie mogą, i gdy kąty ich bryłowe także ſobie odpowiadaiące, robią ſię z kątów równych należących do tychże ścian.

Niech będą dwa Równoległościany: AF, af, których wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie w iednym i w drugim Równoległościanie, mogą przyſtać do ſiebie, i których kąty bryłowe także ſobie odpowiadaiące nap: A, i a, robią ſię z równych kątów tychże ścian; te dwa Równoległościany przyſtać do ſiebie mogą. *Tab: III Fig: 12a.*

Dowodz: Ponieważ kąty bryłowe, A. i a, robią ſię z równych względem ſiebie kątów płaſkich, więc przyſtać do ſiebie mogą. Przenioſłſzy tedy Równoległościan af. tak aby kąt bryłowy a, przyſtał w rzeczy ſamey do kąta bryłowego A; ponieważ i kąty płaſkie, z których ſię te bryłowe robią, przyſtaią iedne do drugich ſobie równych; a linie ab, ad, ah, ſą równe względem liniy AB, AD, AH; więc punkta: b, d, h, przyſtaną do punktów: B, D, H, i ściany także

że czyniące dwa kąty bryłowe a, i A, przyſtaną iedne do drugich; a zatym i punkta: c, g, e, przyſtaną do punktów odpowiadaiących ſobie: C, G, E; a wſzczególności linije: bc, bg, przyſtaną do liniy: BC, BG. Więc i płaſzczyzna przechodząca przez linije: bc, bg. leżeć będzie na płaſzczyznie przechodzącey przez linije BC, BG. Że zaś przypuściliśmy iż ściana bcfg, przyſtać może do ściany BCFG, więc punkt f, przyſtanie do punktu F.

Tymże ſpoſobem okazać można, że i wſzyſtkie inne ściany, i kąty Równoległościanu af, przenieſionego, przyſtaną do innych ścian i kątów Równoległościanu AF, a zatym te dwa Równoległościany przyſtać do ſiebie mogą.

73. *Uwaga*. Tymże cale ſpoſobem dowodzi ſię, że dwie iakiekolwiek Bryły, przyſtać mogą do ſiebie, gdy wſzyſtkie kąty ich bryłowe odpowiadaiące ſobie, przyſtać także do ſiebie mogą, i gdy ściany iedney Bryły przyſtać mogą do ścian odpowiadaiących w drugiey Bryle.

73. *Definicye*. Uważaiąc Równoległościan iakoby zbudowany na iedney z ścian ſwoich, ta ściana nazywa ſię, *podſtawą* iego; a proſtopadła od punktu którego kolwiek ściany przeciwney, do tey

ſpu-

ſpuſzczona, nazywa ſię *wyſokością* tego Równoległościanu.

Gdy ściany zbudowane na bokach podſtawy, ſą do niey proſtopadłemi, taki Rownoległościan nazywa ſię *proſtym* (Parallelopipedum rectum) Równoległościany proſtokątne, ſą gatunkiem Równoległościanów proſtych, w których podſtawa nawet ſama ieſt proſtokątem.

75. *Twierdz.* 3. Dwa Równoległościany równe ſą w *bryłowatości* (ſoliditas) gdy maią iednakową wyſokość, i na teyże ſamey ſą zbudowane podſtawie, a dwie ich ściany, na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię, ſtoią na tymże ſamym boku podſtawy.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGE. i ACLI. zbudowane na teyże ſamey podſtawie AC; i niech dwie ich ściany, AG, AL znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie; te dwa Równoległościany, ſą równe w bryłowatości. *Tab. III Fig.* 3

Dowodz. Dwie Bryły: ADIEHM, BCKFGL, maią takie wſzyſtkie ściany odpowiadaiące ſobie, iż iedne do drugich przyſtać mogą; wſzyſtkie podobnie kąty ich

ich bryłowe przyſtać mogą do ſiebie. Jakoż Tróykąt HAM, może przyſtać do Tróykąta GBL, a wſzczegulności kąty HAM, GBL, ſą równe. Równoległobok HADE przyſtać może do Równoległoboku: GBCF ſobie przeciwnego, w pierwſzym Równoległościanie, a wſzczegulności kąty: HAD, GBC, ſą równe; Równoległoboki także: MADI, LBCK przeciwne ſobie, w drugim Równoległościanie, mogą do ſiebie przyſtać, a wſzczegulności kąty: MAD, LBC, ſą równe, więc kąty bryłowe A,B, i ściany tych kątów mogą przyſtać do ſiebie. Toż mowić i o wſzyſtkich innych kątach bryłowych, i o wſzyſtkich innych, tych dwóch Brył, ścianach. Zaczym te dwie Bryły przyſtać mogą do ſiebie. i ſą równe ſobie w bryłowatości. Aże od całey Bryły ACLE odiąwſzy pierwſzą z Brył wyżey wyrażonych, ADIEHM, zoſtaie ſię Równoległościan ACLI a odiąwſzy od teyże całey Bryły ACLE, drugą Bryłę BCKFGL, zoſtaie ſię Równoległościan ACGE; więc te dwa Równoległościany ſą równe. (f)

76.

(f) *To dowodzenie ieſt ogulne, i rozciąga ſię do iakiegożkolwiek położenia linii MI; czyliby punkt M przypadał na punkt*

76. *Twierdz.* 4. Dwa Równoległościany są równe w bryłowatości, gdy iednaką maią wysokość, i na teyże samey są zbudowane podstawie, choć ciaż żadna z ich ścian stoiacych na bokach podstawy, nie będzie na teyże samey płaszczyznie.

Niech będą dwa Równoległościany: ACGF, i ACLI, na teyże samey podstawie AC, z iednaką wysokością; i niech inne ich ściany na odmiennych znayduią się płaszczyznach; te dwa Równoległościany są równe. *Tab. III Fig. 4.*

Dowodz. Przedłużmy linije KI, HE tak daleko, aż się znaydą z sobą w punkcie O. Niech ieszcze i liniia LM, przedłużona, przecina HE, w N; a liniia GF także przedłużona niech przecina IK w P i niech Q będzie punktem przecięcia liniy GF, LM, albo ich przedłużeń.

Pociągniymy liniie AN, DO, EQ, CP.

Bryła ACQO, będzie Równoległościanem, czego bardzo łatwo dowieść można.

H ... Ró-

G, czyliby się znaydował między G i H, czyli nakoniec byłby na linii HG przedłużoney.

Równoległościan ACQO, ma tę ſamę co tamte dwa, podſtawę AC.

Ma ścianę AO na płaſzczyznie ściany AE, należącey do Równoległościanu, ACGE, więc temu Równoległościanowi będzie równy.

Ma zaś oprócz tego ścianę AQ na płaſzczyznie ściany AL, należącey do Równoległościanu ACLI, więc będzie rówwny i temu drugiemu Równoległościanowi.

Więc Rownoległościan ACQO równy ieſt tak Równoległościanowi ACGE. iako i Równoległościanowi ACLI; a zatym i te dwa Równoległościany ſą też ſobie równe,

77 *Twierdz.* 5. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy iednaką maią wyſokość i równe podſtawy, z iednym ſpolnym bokiem, i gdy ich ściany na tymże ſamym boku ſpolnym wyſtawione, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Th. III Fig. 5. Niech będą dwa Równoległościany: ACGE, ICOQ iednakiey wyſokości; a podſtawy ich równe AC, IC, niech maią bok

bok ſpolny CD, na którym wyſtawione ſą dwie ściany DF, DP na teyże ſamey płaſzczyznie znayduiące ſię, te dwa Równoległościany ſą równe.

Wykreśl. Przez punkta I, i L, poprowadźmy na płaſzczyznie AG, czyli AO, liniie JN, LM, równoodległe od AH, albo BG, i niech te równoodległe ſpotykaią w N i M. liniią HO. Pociągniymy i liniie EN, FM. Bryła JCME będzie też Równoległościanem.

Dowodz: Równoległościan: ICME, ma też ſamę podſtawę JC, i tę ſamę wyſokość, co i Równoległościan JCOQ, a zatym ſą ſobie równe.

Tenże Równoległościan JCME, i Równoległościan ACGE, uważaiąc w nich ścianę ſpolną DF, iak podſtawę, maią też iednaką wyſokość, a zatym ſą ſobie równe. Więc Równoległoscian JCME, równy ieſt tak iednemu, iak i drugiemu Równoległościanowi: ACGE, i JCOQ, a zatym i te dwa Równoległościany ſą równe.

78. *Twierdz:* 6. Dwa Równoległościany ſą równe, gdy maią iednaką wyſokość, *Tab. III Fig. 5*

 i gdy

gdy ich podſtawy maiące bok ieden ſpolny, ſą równe.

Niech we dwóch Równoległościanach iednakiey wyſokości będą dwie podſtawy: AC, i IC równe, i maiące ſpolny bok CD; te dwa Równoległościany będą równe.

Wykreśl. Na podſtawie IC, iednego z tych Równoległościanów, który nazwiemy pierwſzym, poſtawmy trzeci Równoległościan teyże ſamey wyſokości, tak, aby ściana iego ſtoiąca na boku CD, znaydowała ſię na płaſzczyznie ściany drugiego Równoległościanu, ſtoiącey na tymże boku;

Ten trzeci Równoległościan, iako maiący z pierwſzym ſpolną podſtawę i wyſokość, będzie mu równy. Tenże trzeci Równoległościan, będzie równy, i drugiemu; bo maią równe podſtawy: IC, AC, z ſpolnym bokiem CD, i ściany ich ſtoiące na boku CD, znayduią ſię na teyże ſamey płaſzczyznie.

Więc ten trzeci Równoległościan równy ieſt tak pierwſzemu iak i drugiemu, a zatym i one ſobie równe będą.

W ſzcze-

Wſzczególności. Równoległościan każdy równy ieſt Równoległościanowi proſtokątnemu, który ma tę ſamę, co i tamten wyſokość, podſtawę równą podſtawie iego, i bok ieden ſpolny obydwom podſtawom.

79. Zkąd wynika, że cokolwiek ſię powiedziało o Równoległościanach proſtokątnych, wſzyſtko to do iakichkolwiek innych można przyſtoſować; kładąc zamiaſt każdego z nich, Równoległościan proſtokątny, tegoż ſamey wyſokości, i podſtawy równey, a maiącey bok ieden ſpolny z podſtawami Równoległościanów nie proſtokątnych. I tak.

1. Dwa Równoległościany, maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; bo Równoległościany proſtokątne iednakiey wyſokości, i maiące ztamtemi Równoległościanami równe podſtawy, a w nich ſpolny bok ieden, ſą równe.

2. Dwa Równoległościany ſą też równe, których podſtawy ſą w ſtoſunku odwrótnym, ich wysokości.

3. Dwa Równoległościany, których bryłowatości ſą równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrótnym ich wyſokości.

4.

4. Wszyftko to, co fię powiedziało o zamienianiu ftofunku dwoch Równoległościąnów proftokątnych, na ftofunek dwóch liniy; i o mierze liczebney dwóch Równoległościanów proftokątnych, przyftofować można do miary Równoległościanów nie proftokątnych; używaiąc do tego, boku iednego podftawy, wyfokości iey względem tego boku, i wyfokości Równoległościanu.

80. *Przeftroga* Gdyby ścifłe i prawdziwe Geometryczne dowodzenie wyżey położone przytrudnym fię zdawało uczniom do poięcia, mimo wyftawionych im przed oczy figur, z drewna, lub papieru wyrobionych; można im to będzie łatwiey do poięcia podać w fpofob naftępuiący.

Niechay dwa Równoległościany z równemi podftawami. i wyfokościami ftoią na teyże famey płafzczyznie. Niech inna iakakolwiek płafzczyzna równoodległa od pierwfzey, przecina te dwa Równoległościany. Przecięcia ich będą równe, i podobne ich podftawom, a zatym i fobie równe będą; i gdziekolwiek te dwa Równoległościany przetniemy przez płafzczyznę równoodległą od ich pod-

podſtaw, równe zawſze będą te przecięcia. Zadney więc niemaſz przyczyny, dla ktoreyby ieden z tych Równoległościanow nie miał być równym drugiemu.

Trzeba tu iednak oſtrzedz zaraz uczniów, iż tym ſpoſobem, ſłabo ſię w rzeczy ſamey dowodzi równość dwóch Równoległościanow. Bo chóciażby iak naywięcey było tych przecięć równoodległych od podſtaw Równoległościanow, to ieſt: chociażby iak naymnieyſza była odległość każdego z tych przecięcia, od drugiego naybliżſzego, wſzelako części Równoległościanów zawarte między takiemi dwoma przecięciami, ſą ieſzcze Równoległościanami, które tak ſię względem ſiebie maią, iak ſię maią całe Równoległościany, których tamte ſą częściami. Aby więc wnieść można równość Równoległościanow, z równości ich części, trzebaby pierwey dowieśc równości tych części.

Może ſię imaginacya naſza tak daleko zapuścić, że przez nię wyſtawiemy ſobie dwoch Równoległościanów przycięcia tak bliſkie iedne od drugich, iż części między niemi zawarte będą ſię zdawać

wać nie różnić od podſtaw tychże Równoległościanów; lecz prawdziwe rozumowanie uczynić tu różnicę potrafi i powinno. Wiemy albowiem że małość lub wielkość iakiey rzeczy, nie ieſt w ſobie małością lub wielkością ale ſię albo za małość bierze względem inney rzeczy większey, albo za wielkość, względem inney mnieyſzey; i nie można nigdy Bryły choć by też naycieńſzey za iedno brać z powierzchniami, które ią kończą. Prawda to ieſt, że im większa będzie liczba przecięciów, dwúch Równoległościanów przez płaſzczyzny równoodległe od ich podſtaw, tym mnieyſza będzie różnica małych dwóch ich części zawartych między dwiema naybliżſzemi płaſzczyznami, czyli przecięciami; ale znowu, ieżeli iakakolwiek ieſt choćby też naymnieyſza, tá różnica, tedy wielokroć powtorżona może uczynić różnicę wielką, w dwóch Równoległościanach, których równości chcemy dowodzić, z równości z ich cząstek, czyli z małych Równoległościanów, z których ſię ſkładaią.

Ta ſama trudność do rozwiązania zoſtaie, gdyby kto równości dwóch Równoległościanów maiących iednaką podſtawę

ſtawę i wyſokość, a z których ieden byłby naprzykład. proſty, a drugi nie, chciał dowodzić z podnoſzenia ſię w górę ich podſtaw w równey zawſze od pierwſzego położenia odległości; ponieważ pierwey dowieść trzebaby, że mieyſca od podſtaw przebyte, nie podług tey drogi brane być powinny, którą w ſamey rzeczy punkt każdy tych podſtaw przebył; (bo do iednakiey wyſokości poſtępuiąc, więcey mieyſca przeydzie punkt nap: ſkrayny Równoległościanu ukośnego, niż tego, który ieſt proſty) ale to mieyſce od podſtaw Równoległościanów przebyte, powinno ſię wymierzać wzdłuż linii proſtopadłey do teyże podſtawy, ponieważ ta tylko liniia mierzy odległość, w którey podſtawa podnoſzeniem ſię ſwoim oddaliła ſię od pierwſzego ſwego położenia.

Naſtępuiące porównywanie może iakożkolwiek ſłużyć do ułatwienia tych wątpliwości, lubo ich nie znoſi cale.

Gdy dwa Równoległoboki zrobione na teyże ſamey podſtawie, i z równą wyſokością, przetniemy liniią równoodległą od podſtawy, obadwa przecięcia równe będą podſtawie. Wſzyſtkie też inne

ne

ne takowe przecięcia tych dwóch Równoległoboków, byłyby równe, i tyleby ich było w iednym, co i w drugim Równoległoboku. Toż mówić i o dwoch Tróykątach, ktòrych przecięcia równoodległe od podstawy spolney, byłyby także równe. Dla czegoż więc te dwa całe Równoległoboki, lub Tróykąty niemiałyby sobie być równe? Ponieważ tedy tym sposobem dochodziemy względem powierzchni płaskich, tey samey prawdy, którey doszliśmy ścisłym pierwey dowodzeniem; iuż ten sam skutek, powinien nas wątpliwości pozbawić, ktorąbyśmy mieć mogli w używaniu tego sposobu. Można zatym przystosować go i do Brył dla teyże przyczyny.

Obiaśni się to iaśnie i potym, gdy mówić będziemy o sposobie *wyczerpania* (de methodo exhaustionis.)

81. *Twierdzenie 7.* W iakimkolwiek Równoległościanie, przez krawędź którąkolwiek, i przez przekątną iedney z ścian iego przeciągnąwszy płaszczyznę; przecięcie Równoległościanu przez tę płaszczyzne, będzie Równoległobokiem, i podzieli Rownoległościan na dwie części, które przystać do siebie mogą.

Niech

Niech będzie Równoległościan: ACGE; *Tab: III* przez krawędź AH, i przez przekątną *Fig.* 1. HF niech przechodzi płaszczyzna; linije AH, CF są równoodległe, a płaszczyzna, która przechodzi przez AH, HF, przechodzi też i przez CF. Że zaś linije: AH, CF są równe, i równoodległe, więc Czworokąt ACFH, iest oraz i Równoległobokiem.

Dwie Bryły: ABCFGH, FEHACD, mogą przystać do siebie.

1. Wszystkie ich ściany, są równe iedne względem drugich, bo ściany ich *Rownoległoboczne* (Parallelogrammicæ) są ścianami przeciwnemi w Równoległościanie; ściany zaś ich Tróykątne iak nap: ADC, HEF, maią równe boki iedne względem drugich.

2: Wszystkie ich kąty bryłowe mogą przystać iedne do drugich; nap: kąt bryłowy w A iedney Bryły, robi się z trzech kątów płaskich: CAB, BAH, HAC, które równe są względem kątów EFH, EFC, HFC, z których się robi kąt bryłowy w F, drugiey Bryły.

Więc te dwie Bryły mogą przystać do siebie, a wszczegulności są sobie równe.

ROZD:

ROZDZIAŁ V.

O Graniastosłupach.

82. Twierdz: przybrane. Niech będą dwie prostokreślne Figury równe i podobne, wykreślone na dwóch równoodległych płaszczyznach; niech ieszcze i boki ich równe, będą równoodległe iedne względem drugich; Czworokąty, których bokami przeciwnemi, będą boki równe tych Figur, są Równoległobokami.

Dowodz: We wszystkich takowych Czworokątach, boki dwa przeciwne są równe, i równoodległe; a zatym i inne boki są też równe i równoodległe.

83. *Defin*: Niech będzie Bryła iaka zakończona dwiema Figurami prostokreślnemi, równemi, podobnemi i równoodległemi a maiącemi wszystkie boki, iedne względem drugich równoodległe, i tylą Równoległobokami maiącemi za boki, boki przeciwne tamtych dwóch Figur, ile każda z tych Figur ma boków, ta Bryła nazywa się *Graniastosłupem* (Prisma). I tak Równoległościany, o których w poprzedzaiących Rozdziałach

mówiliśmy, ſą pewnemi Graniaſtoſłupów gatunkami. Jedna z tych Figur równych i równoodległych, na którey wyſtawiamy ſobie, iakoby zbudowany Graniaſtoſłup nazywa ſię iego *podſtawą*, a proſtopadła ſpuſzczona na tę podſtawę, z punktu jakiegokolwiek ściany przeciwney nazywa ſię *wyſokością* tego Graniaſtoſłupa. Graniaſtoſłup albo ieſt *proſty*, albo *ukośny*; *proſty*, gdy ściany iego ſtoią do pionu względem podſtawy; *ukośny*, gdy też ściany ſą do podſtawy nachylone.

Różne także nazwiſka przybiera Graniaſtoſłup, podług rozmaitey liezby boków podſtawy ſwoiey, albo podług wielości ścian pobocznych. Nazywa ſię *tróykątnym*, *czworokątnym*, *pięciokątnym*, *ſześciokątnym*, gdy podſtawa iego ieſt Tróykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

84. *Twierdz:* 1. Przeciąwſzy gdziekolwiek Graniaſtoſłup płaſzczyzną równoodległą od iego Podſtawy, przecięcie to będzie Figurą równą i podobną podſtawie.

Dowodz: Przecięcie iedney którey kolwiek ściany poboczney, przez tę płaſzczy-

ſzczyznę, równoodległym będzie od tego boku podſtawy, na którym ta ściana ſtoi; i te dwie liniie będą bokami przeciwnemi Równoległoboku, który za dwa inne boki, ma części dwóch innych boków teyże ściany, zawarte między podſtawą i płaſzczyzną przecinaiącą; więc te dwie liniie będą równe.

Przecięcia więc przez tę płaſzczyznę dwóch ścian przyległych, będą równoodległe względem boków ſobie przeciwnych, należących do podſtawy, a zatym kąt, który te ſpolne przecięcia zrobią, równy będzie kątowi zawartemu między temi bokami podſtawy.

Będzie tedy mieć przecięcie Graniaſtoſłupa przez tę płaſzczyznę, wſzyſtkie ſwoie boki i wſzyſtkie kąty równe względem boków i kątów podſtawy Graniaſtoſłupa, i dla tego przecięcie to przyſtać może do podſtawy.

85. Można ſobie wyſtawić Graniaſtoſłup, iakoby zrobiony przez poſuwanie ſię w gorę iego podſtawy, w ſpoſob naſtępuiący:

Niech będzie Figura iaka proſtokreślna, odryſowana na płaſzczyznie. Od wierz-

wierzchołku kąta któregokolwiek tey Figury, wyciągniymy liniią proſtą czyniącą iakikolwiek kąt z tą płaſzczyzną. Niech ſię potym wznoſi do gory ta Figura, w rówoney zawſze od ſiebie odległości, a ten wierzchołek niech nigdy nieſchodzi z linii od niego wyprowadzoney; Bryła która ſię takim ruchem utworzy, będzie Graniaſtoſłupem.

86. *Twierdz.* 2. Graniaſtoſłup tróykątny, ieſt połową Równoległościanu takiego, któryby za podſtawę miał Rownoległobok dwa razy większy od podſtawy tego Graniaſtoſłupa, zdwoma bokami rownaiącemi ſię bokom podſtawy tegoż Graniaſtosłupa tróykątnego.

Niech będzie Graniaſtosłup tróykatny ABCDEF, którego podſtawą ieſt Troykat ABC. Dokończmy Równoległoboku ABCG, którego dwoma bokami ſą AB, BC; na tym Równoległoboku dokończmy Równoległościanu ACEH, którvby miał ſpolne dwie ściany AE, i BD z Graniaſtosłupem tróykątnym. *Tab. IV. Fig. 1.*

Dwa Graniaſtosłupy Tróykatne ABCDEF, DHFAGC, mogą do ſiebie przyſtać, bo ſą dwiema częściami oddzielonemi

mi przez płaszczyznę przekątną ACDF; a zatym ieden z nich, nap: Graniastosłup ABCDEF, iest połową Równoległościanu ACEH,

87 *Wniosek.* Cokolwiek się powiedziało o Równoległościanach względem ich wielkości, wszystko to przystosować można do Graniastosłupów troykątnych, które tych Rownoległościanow są połowami.

1. Dwa Graniastosłupy troykątne, równey wysokości i podstawy, równaią się w bryłowatości.

2. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są rowne, maią się do siebie, iak ich wysokości.

3. Dwa Graniastosłupy troykątne iednakiey wysokości, maią się do siebie iak ich podstawy.

4. Dwa Graniastosłupy troykątne, których podstawy są w stosunku odwrotnym ich wysokości, równaią się sobie w bryłowatości.

5. Dwa Graniastosłupy troykątne, równe w bryłowatości, maią podstawy w stosunku odwrótnym ich wysokości.

6. Co

6. Co ſię powiedziało o porownywaniu liczebnym dwòch Ròwnoległościanòw, to twierdzić można i o porownywaniu dwòch Graniaſtosłupòw tròykątnych. Trzeba podobnie dla znalezienia ich bryłowatości przez rachunek, rozmnożyć liczbę, znaczącą wielkość podſtawy Graniaſtoſłupa tròykątnego, przez liczbę znaczącą wielkość iego wyſokości.

7. Maiąc wiadomą podſtawę Graniaſtosłupa tròykątnego, i kąty dwòch ścian iego, ktòre z kątem podſtawy czynią ieden kąt bryłowy, można wyznaczyć Graniaſtosłup tròykątny, i iego wyſokość, a zatym i bryłowatość tymże ſamym ſpoſobem, iak ſię czyniło względem Ròwnoległościanòw.

8. Graniaſtosłupy tròykątne, maiące ſpòlny kąt ieden bryłowy, ſą do ſiebie iak Ròwnoległościany proſtokątne, maiące te ſame trzy krawędzie; w rachunku zaś tak ſą do ſiebie, iak liczby trzy ciągło iedna przez drugą rozmnożone, wyrażaiące wielkość tych trzech krawędzi.

88. *Twierdz:* 3. Graniaſtosłup nie tròykątny może być rozłożony na Gra-

 nia-

niaſtosłupy tròykątne teyże co on wyſokości; za podſtawy zaś maiące Tròykąty, na ktòre rozdzielona ieſt iego podſtawa przez tyle przekątnych ciągnionych od iednego tey podſtawy wierzchołka do innych, ile ich poprowadzić można.

Tab. IV. Fig. 2 Niech będzie ABCDE, podſtawa nap: pięciokątna Graniaſtosłupa ABCDE edcba. Od iey wierzchołka nap: A poprowadźmy przekątne: AD, AC, te rozdzielą Podſtawę na trzy Tròykąty: AED, ADC, ACB. Na ścianie przeciwney podſtawie, od punktu *a*, odpowiadaiącego punktowi A, poprowadzmy przekątne: ad. ac.

Liniie Aa, Dd, ſą obiedwie ròwnoodległe od linii Ee. i oney ròwne; więc i względem ſiebie będą ròwnoodległemi i ròwnemi; a przeto Czworokąt ADda, ieſt Ròwnoległobokiem, a zatym Bryła ADE eda, ieſt Graniaſtosłupem tròykątnym. Tymże ſpoſobem okazuie ſię, że i Bryły: ACDdca, ACBbca, ſą Graniaſtosłupami tròykątnemi.

89. *Twierdz: 4.* Dwa iakiekolwiek Graniaſtosłupy maiące ròwną wyſokość, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy.

Jakoż

Jakoż Graniaſtosłupy ADE eda, ADC cda, ACB bca, i t. d. maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy; ADE, ACD, ABC; więc ieden z nich, nap: Graniaſtosłup: ADE eda, tak ſię ma do ſummy wſzyſtkich, to ieſt, do Graniaſtosłupa pięciokątnego, iak podſtawa tròykątna pierwſzego, do ſummy podſtaw wſzyſtkich, to ieſt, do podſtawy Graniaſtosłupa pięciokątnego.

Podobnie też i każdy inny Graniaſtoſłup iednakiey wyſokości, takby ſię miał do Graniaſtoſłupa tròykątnego: ADEeda, iak podſtawa iego do podſtawy tròykątney ADE.

Więc (złożywſzy ſtoſunki) będzie ſtoſunek iakiegokolwiek Graniaſtoſłupa do Graniaſtoſłupa ABCDE edcba, ròwny ſtoſunkowi podſtawy pierwſzego Graniaſtoſłupa, do podſtawy ABCDE; (a to wtedy, gdy wyſokości tych dwòch Graniaſtoſłupòw ſą ròwne.)

Wſzczegulności zaś, gdy Ròwnoſegłościan i Graniaſtosłup iakikolwek ròwne mieć będą podſtawy i wyſokości; bryłowatość iednego, ròwna będzie bryłowatości drugiego.

A zatym cokolwiek ſię o Ròwnoległościanach powiedziało, można to i do

Graniastosłupów iakichkolwiek przystosować, co do wielkości ich, ile te zawisły od ich podstaw i wysokości. Można przeto do iakichkolwiek Graniastosłupów przystosować wnioski, co do Graniastosłupów tròykątnych wszczegulności, ktòre po Twierdzeniu 2gim tego Rozdziału następuią.

ROZDZIAŁ VI.

O Piramidach albo Ostrostupach.

90. DEfin: Niech punkt iaki znayduie się nad płaszczyzną Figury iakieykolwiek prostokreślney; przez ten punkt i przez wszystkie boki Figury, niechay przechodzą płaszczyzny; zrobi się ztąd Bryła kończąca się z iedney strony na tey Figurze, a z innych stron, na tylu Tròykątach maiących spolny wierzchołek w owym punkcie, ile ta Figura ma bokòw. Bryła ta nazywa się *Ostrostupem* (Pyramis.) Powierzchnią Ostrosłupa można sobie wystawić iakoby zrobioną ruchem nici przywiązaney iednym końcem do punktu znayduiącego się nad płaszczyzną Figury, a drugim końcem wyciągnionym obracaiącey się około obwódu teyże Figury. Figura prostokreślna,

ślna, którey boki służą za podstawy Tróykątów kończących Ostrosłup, nazywa się *podstawą* ostrosłupa, te Tróykąty nazywaią się iego *ścianami*; punkt który iest wierzchołkiem spolnym wszystkich ścian Ostrosłupa, nazywa się *wierzchołkiem* iego. Prostopadła spuszczona od tego wierzchołka, na płaszczyznę podstawy, zowie się *wysokością* Ostrosłupa.

Ostrosłup różne przybiera nazwiska, podług wielkości boków podstawy swoiey. Nazywa się tróykątnym, czworokątnym, pięciąkątnym, sześciokątnym i t. d. gdy podstawa iego iest Tróykątem, Czworokątem, Pięciokątem, Sześciokątem i t. d.

Ten Ostrosłup nazywać będziemy *prostym*, którego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się na kole opisać; i gdy prostopadłey spuszczoney od wierzchołka tego Ostrosłupa, drugi koniec przypada na środek tego koła.

W takim Ostrosłupie wysokość wszystkich ścian iest iednakowa, i tych ścian płaszczyzny równie są nachylone do płaszczyzny podstawy.

W Ostrosłupie, którego podstawą iest Figura prostokreślna mogąca się wpisać w koło

w koło, a którego wyſokość wychodzi od środka, tego koła, wſzyſtkie krawędzie ścian ſą równe, a zatym wſzyſtkie te ściany ſą Tròykątami równoramiennemi. Ale że środek koła opiſanego na podſtawie, może czaſem za tę podſtawę wychodzić, dla tego, takowego Oſtroſłupa nie można nazywać proſtym.

Zeby iednak nazwiſko to Oſtroſłupa proſtego (zle do tych czas zwyczaynie określone) ogulnieyſzym uczynić, przydamy naſtępuiący warunek.

Gdy w Figurze proſtokreślney, znayduie ſię taki punkt, przez który ciągnione liniie a po obywòch ſtronach na obwodzie Figury zakończone, dzielą ſię w tym punkcie na dwie równe części, ten punkt nazywa ſię środkiem Figury.

I tak punkt przecięcia przekątnych w Równoległoboku, ieſt tego Równoległoboku środkiem. Jeżeli tedy Figura proſtokreślna maiąca taki środek, ſłuży za podſtawę Oſtroſłupowi, i ieżeli proſtopadła od wierzchołku iego ſpuſzczona przypada na ten środek Figury, taki Oſtrosłup nazwiemy proſtym.

Oſtro-

Ostrosłup nazywa się *foremnym*, gdy za podstawę ma Figurę prostokreślną foremną.

91. *Twierdz:* 1. Przeciąwszy Ostrosłup płaszczyzną rownoodległą od podstawy iego, przecięcie to będzie Figurą podobną do podstawy.

Niech będzie Ostrosłup SABCDE, maiący wierzchołek w punkcie S, a którego podstawą iest Figura prostokreślna ABCDE. Niech ten Ostrosłup przecina płaszczyzna rownoodległa od podstawy, przecięcie to abcde będzie podobne do podstawy. Tab: IV Fig: 3

Ponieważ płaszczyzna podstawy równoodległa iest od płaszczyzny przecinaiącey; będą też i przecięcia ścian, spólne z temi płaszczyznami, równoodległe iedne względem drugich; więc wszystkie boki przecięcia nap. ab, bc równoodległe będą względem boków AB, BC podstawy; a zatym i wszystkie kąty przecięcia, równe będą względem kątów podstawy, nap: kąt abc, równy będzie kątowi ABC. Iest tedy przecięcie równokątne z podstawą.

Tróykąty SAB, sab są podobne, więc Sb: SB = ab : AB.

Tróy-

Tròykąty też, Sbc. SBC podobne; więc: Sb: SB=bc: BC; a zatym ab: AB =bc: BC.

Więc przecięcie, i podſtawa, maią około kątòw względem ſiebie ròwnych, boki proporcyonalne, a zatym przecięcie podobne ieſt do podſtawy.

W ſzczegulności zaś, przecięcie takie, i podſtawa, maią ſię do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym bokòw ich, odpowiadaiących ſobie; albo ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym liniy nap: Sb, SB; albo nakoniec w ſtoſunku dwumnożnym ich odległości od wierzchołka S, Oſtroſłupa, maiącey ſię wymierzać przez proſtopadłą ſpuſzczoną od tego wierzchołka, do ich płaſzczyzn; tak dalece, że przeciąwſzy Oſtroſłup płaſzczyznami ròwnoodległemi od podſtawy, a w takich od wierzchołka odległościach, aby tè miały ſię do ſiebie, iak liczby 1,2,3,4,5, i t. d: powierzchnie tych przecięciów będą do ſiebie iak liczby 1,4,9,16,25, i t. d. (Obacz Geometryi Części I. Rozdz. IX.)

Uwaga. Tego Podania częſte ieſt w Fizyce używanie; i dla tego trzeba ie iak nayiaśniey uczniom wyłożyć, i o gruntownym iego zrozumieniu od nich być przeświadczonym.

92. *Wnio-*

92. *Wniosek* 1. Niech będą dwa Ostrosłupy z iednakową wysokością, i z równemi podstawami znayduiącemi się na teyże samey płaszczyznie, i poiedney stronie tey płaszczyzny. Gdy te Ostrosłupy przetniemy płaszczyznami równoodległemi od ich podstaw, przecięcia odpowiadaiące sobie, tak się mieć do siebie będą, iak podstawy tych Ostrosłupów; a wszczegulności, gdy te podstawy równe będą, wszystkie też przecięcia iednego Ostrosłupa będą równe przecięciom odpowiadaiącym drugiego.

93. *Wniosek* 2. Z tego co się powiedziało o równości Graniastosłupów maiących iednaką wysokość i równe podstawy, a stoiących na teyże samey płaszczyznie, iako też i o proporcyonalności tych Graniastosłupów z ich podstawami, gdy te przy równych wysokościach, są nierówne; możnaby mniemać, że też i Ostrosłupy maiące równe wysokości, i podstawy, są równe, i że gdy równe maią wysokości, będą do siebie iak ich podstawy.

Następuiące Twierdzenia zamienią to mniemanie w pewność, gdy ich dowody przytoczemy.

94.

91. *Twierdzenie przybrane.* Niech będzie Oſtroſłup Tròykątny przecięty płaſzczyznami ròwnoodległemi od podſtawy, i w iednakowey od ſiebie odległości zoſtaiącemi. Na podſtawie, i na każdym przecięciu wyſtawmy ku wierzchołkowi Oſtroſłupa, Graniaſtoſłupy z ktòrych każdy miałby wyſokość ròwną odległości dwòch płaſzczyn naybliżſzych. Na tychże przecięciach, wyſtawmy znowu inne Gtaniaſtoſłupy ku podſtawie, z tą ſamą, co pierwſze, wyſokością. Niech każdy z tych Graniaſtoſłupòw ma iednę krawędź ſpolną z Oſtroſłupem, i dwie ściany na tychże płaſzczyznach co i dwie krawędzie Oſtroſłupa. Różnica ſummy wſzyſtkich pierwſzych Graniaſtoſłupów (ktòre nazwę opiſanemi) od ſummy drugich (ktòre nazwę wpiſanemi) ròwna będzie pierwſzemu Graniaſtoſłupowi, ktòry ieſt wyſtawiony na podſtawie Oſtroſłupa.

Tab. I. V *Fig:* 4. Nich będzie Oſtroſłup tròykątny SABC, kròrego wiezchołek S, a podſtawa ABC.

Podzielmy ten Oſtroſłup na części nap: 5, płaſzczyznami ròwnoodległemi od podſtawy, i w iednakowey od ſiebie odległości zoſtaiącemi. Niech będą: $A^1B^1C^1$ $A^2B^2C^2$ $A^3B^3C^3$ $A^4B^4C^4$ przecięcia Oſtroſłupa, przez

przez te płáſzczyzny. Na podſtawie i na wſzyſtkich przecięciach Oſtroſlupa wyſtawmy ku iego wierzchołkowi Graniaſtoſłupy, kończące ſię na przecięciu nayblizſzym; te będą opiſanemi na Oſtroſłupie, bo ich ściany wyſtępować będą za ściany Oſtroſłupa. Wyſtawmy znowu na tychże przecięciach ku podſtawie, inne Graniaſtoſłupy teyże ſamey co pierwſze wyſokości; te będą wpiſanemi w Oſtroſlup, bo za ściany ich, będą wychodzić ściany Oſtroſlupa. Rożnica między ſummą pierwſzych i drugich Graniaſtoſłupòw, ròwnać ſię będzie Graniaſtoſłupowi opiſanemu, wyſtawionemu na podſtawie Oſtroſłupa.

Wykreśl: Podzielmy liniie AB, AC, na 5 ròwnych części. wpunkach: b^1, b^2, b^3, b^4, c^1, c^2, c^3, c^4. i pociągniymy liniie; b^1c^1, b^2c^2, b^4c^4.

Trôykąty: Ab^1c^1, Ab^2c^2, Ab^3c^3, Ab^4c^4, będą ròwne względem Oſtroſlupa przecięciów: $A^1B^1C^1$, $A^2B^2C^2$, $A^3B^3C^3$, $A^4B^4C^4$.

Rôżnica między Graniaſtoſłupem opiſanym a ſtoiącym na podſtawie ABC, i między Graniaſtoſłupem wpiſanym a ſto-

iącym

iącym na podſtawie $A^1 B^1 C^1$ równa ſię Graniaſtoſłupowi teyże ſamey co tamte wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt BCc^1b^1.

Podobnie i różnica między Graniaſtoſłupem opiſanym, a ſtoiącym na przecięciu $A^1B^1C^1$, i między Graniaſtoſłupem wpiſanym a ſtoiącym na przecięciu $A^2B^2C^2$ równa ſię Graniaſtoſłupowi, teyże ſamey co one wyſokości, maiącemu za podſtawę, różnicę tamtych dwóch podſtaw, to ieſt Czworokąt $b^1c^1b^2c^2$.

Także różnice dwóch par Graniaſtoſłupów naſtępuiących, równe ſą Graniaſtoſłupom, teyże co one wyſokości maiącym za podſtawy Cworokąty $b^2c^2b^3c^3$ i $b^3c^3b^4c^4$.

Oſtantni zaś Graniaſtoſłup opiſany, rowna ſię Graniaſtoſłupowi, teyże co on wyſokosci, maiącemu za podſtawę Tróykąt Ab^4c^4.

Różnica tedy między ſummą wſzyſtkich Graniaſtoſłupów opiſanych, a ſummą wſzyſtkich Graniſtoſłupów wpiſanych, rowna będzie ſummie wſzyſtkich Graniaſtoſłupów teyże co one wyſokości, któreby

ſtały

ściany na Czworokątach BCc¹b¹, b¹c¹c²b², b²c²c³b³, b³c³c⁴b⁴, i na Tròykącie Ab⁴c⁴, to iest: rowna będzie Graniastosłupowi tròykątnemu teyże co one wysokości, a maiącemu za podstawę Tròykąt ABC. Ta więc ròżnica ròwna się w samey rzeczy pierwszemu Graniastosłupowi opisanemu.

95. *Wniosek.* Pierwszy ten Graniastosłup opisany na Ostrosłupie SABC, ktòrego podstawa ABC nie odmienia się, będzie tym mnieyszy, im mnieyszą damy mu wysokość, to iest, im liczba przecięć Ostrosłupa będzie większa. Można zaś uczynić ten Graniastosłup mnieyszym od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego, zamieniaiąc ten ostatni Graniastosłup na inny, ktòryby miał za podstawę Tròykąt ABC, i dzieląc wysokość iednostayną Ostrosłupa, na tyle części, aby każda z nich była mnieysza od wysokości tego Graniastosłupa tak przerobionego.

Maiąc więc dany Ostrosłup, można weń wpisać, i opisać na nim sposobem wyżey wyrażonym, tyle Graniastosłupòw, aby ròżnica dwòch summ, mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa na-

znaczo-

znaczonego, a tym bardziey, aby różnica Ostrosłupa od iedney z tych summ mnieysza była od iakiegokolwiek Graniastosłupa naznaczonego.

96. *Twierdz.* 2. Dwa Ostrosłupy maiące równe wysokości i podstawy, są równe.

Gdyby te dwa Ostrosłupy nie były równe, tedy daymy, że ieden z nich byłby większy od drugiego. Niechby więc ta mniemana ich różnica zamieniona była na Graniastosłup maiący równą z temi Ostrosłupami podstawę. Podzielmy wysokość iednego z tych Ostrosłupa na tyle części równych, aby każda z nich mnieysza była od wysokości tego Graniastosłupa. Wpiszmy w ten Ostrosłup i opiszmy na nim Graniastosłupy sposobem wyrażonym w poprzedzaiącym Twierdzeniu przybranym. Toż uczyńmy i na drugim Ostrosłupie; wszystkie Graniastosłupy wpisane, i opisane, na tych dwóch Ostrosłupach, bedą równe iedne względem drugich (87, 88) a zatym summa Graniastosłupów wpisanych nap: w ieden Ostrosłup będzie równa summie Graniastosłupów wpisanych w drugi Ostrosłup. Ze zaś zrobiliśmy różnicę dwóch summ

Gra-

Graniaſtoſłupòw wpiſanych i opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, mnieyſzą od różnicy mniemaney dwòch Oſtroſłupów, więc tym bardziey różnica tego Oſtroſłupa od ſummy wſzyſtkich Graniaſtoſłupòw weń wpiſanych, mnieyſza będzie, od ròżnicy mniemaney tych dwòch Oſtroſłupòw; a zatym i ròżnica pierwſzego Oſtroſłupa, od ſummy Graniaſtoſłupów wpiſanych w drugi Oſtrosłup, mnieyſza będzie, niż ròżnica pierwſzego Oſtrosłupa od drugiego. Summa tedy Graniaſtoſłupòw wpiſanych w ten drugi Oſtrosłup, byłaby więkſza od tego drugiego Oſtrosłupa, co być nie może; a przeto te dwa Oſtrosłupy nie mogą ſobie być nièròwne.

97. *Twierdz:* 3. Graniaſtosłup tróykątny, może zawſze być rozłożony na trzy Oſtrosłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa mieć będą tę ſamę podſtawę i wyſokość, co i Graniaſtosłup.

Niech będzie Graniaſtosłup tròykątny ABCEF, można go rozłożyć na trzy Oſtrosłupy tròykątne ròwne, z ktòrych dwa, tę ſamę, co on mieć będą podſtawę i wyſokość. *Tab.* IV *Fig.* 5

Przez bok AC, podſtawy ABC, Graniaſtoſłupa, i przez koniec F, krawędzi

iego

tego Graniaſtoſłupa nie przechodzącey: przez punkta: A i C, przeciągniymy płaſzczyznę ACF; odetnie ona od Graniaſtoſłupa, Oſtroſłup tròykątny FABC. maiący za wierzchołek. punkt F, a za podſtawę, Tròykąt: ABC; a zatym ten Oſtroſłup, tę ſamę co i Graniaſtoſłup mieć będzie podſtawę i wyſokość.

Podobnie i przez bok EF, ściany przeciwney podſtawie, i przez punkt C przeciągniymy płaſzczyznę ECF; odetnie ona od Graniaſtoſłupa, Oſtroſłup tròykątny: CEDF, maiący za wierzchołek, punkt C, a za podſtawę Tròykąt DEF, ròwny Tròykątowi: ABC, a zatym i ten drugi Oſtroſłup ma tę ſamę także co i Graniaſtoſłup, podſtawę i wyſokość.

Więc dwa Oſtroſłupy: FABC, CDEF ròwne maią wyſokości, i podſtawy, a zatym ſą ròwne (96). Zoſtanie ieſzcze po tych dwòch przecięciach, Oſtroſłup CFEA, zakończony czterema Tròykątami: ACF, ACE, AEF, ECF.

Wyſtawmy ſobie, ten oſtatni Oſtroſłup iako maiący za podſtawę, Tròykąt: nap: ACE, a za wierzchołek, punkt F, Oſtroſłup zaś CEDF, iakoby miał za podſtawę, Tròy-

Tròykąt: CDE, a za wierzchołek tenże punkt F. Przekątna CE, Równoległoboku ACDE, dzieli go na dwa Tróykąty, które przyſtać do ſiebie mogą; więc te dwa Oſtroſłupy maią podſtawy równe, ACE, DEC i na iedney płaſzczyznie znayduiące ſię; a oprocz tego, maią ſpólny wierzchołek w punkcie F, a zatym i wyſokość równą; więc ſą równe; wſzyſtkie tedy trzy Oſtroſłupy, na które Graniaſtoſłup był podzielony, ſą równe.

Wzaiemnie Oſtroſłup tróykątny, można zawſze ſobie wyſtawić, iako trzecią część Graniaſtoſłupa maiącego tę ſamę co i Oſtroſłup podſtawę, i wyſokość.

Niech będzie Oſtroſłup tróykątny: ABCF, którego podſtawa ABC, a wierzchołek F.

Na teyże podſtawie ABC, wyſtawmy ſobie iakoby zbudowany Graniaſtoſłup, ABCDEF, którego dwie ściany ABFE, BCDF znaydowałyby ſię na tych ſamych płaſzczyznach, na których znayduią ſię dwie ściany Oſtroſłupa, i krawędź im ſpolna BF. Podług Twierdzenia poprzedzaiącego, ten Graniaſtoſłup ieſt trzy razy tak wielki, jak Oſtroſłup; więc też i ten Oſtroſłup ieſt trzecią częścią tego Graniaſtoſłupa

ſtupa. A że wſzyſtkie Graniaſtoſtupy maiące równe podſtawy i wyſokości, ſą równe; więc Oſtroſtup tróykątny ieſt trzecią częścią Graniaſtoſtupa iakiegokolwiek, maiącego taką ſamę iak on podſtawę i wyſokość.

98. *Twierdz:* 4. Oſtrosłup iakikolwiek ieſt trzecią częścią Graniaſtoſtupa maiącego tę ſamę co on podſtawę, i wyſokość.

Dowodz. Jakażkolwiek będzie podſtawa Oſtrosłupa, poprowadźmy na niey przekątnych tyle do wſzyſtkich kątów, ile można. Przez te wſzyſtkie przekątne, i przez wierzchołek Oſtrosłupa niech przechodzą płaſzczyzny; Oſtroſtup będzie przez te płaſzczyzny podzielony na tyle Oſtroſtupów tróykątnych, na ile Tróykątów podſtawa była podzielona przez przekątne; każdy z tych Oſtrosłupów tróykątnych, będzie trzecią częścią Graniaſtosłupa maiącego taką ſamę iak on podſtawę, i wyſokość; a zatym ſumma wſzyſtkich tych Oſtrosłupów tróykątnych, to ieſt cały iakikolwiek Oſtrosłup znich ſię ſkładaiący, równać ſię będzie trzeciey części, ſummy wſzyſtkich tych Graniaſtosłupów, albo co naiedno wychodzi, rówać ſię będzie

dzie trzeciey części Graniaſtosłupa maiącego tę ſamę podſtawę i wyſokość, co i Oſtrosłup.

99. *Wnioſki.* Cokolwiek ſię o ſtoſunku Graniaſtosłupów powiedziało, toż mówić można i o ſtoſunku Oſtrosłupów, które, maiąc takie ſame iak i te Graniaſtosłupy, podſtawy, i wyſokości, ſą trzeciemi względem nich częściami.

1. Dwa Oſtrosłupy iakiekolwiek (proſte, lub ukośne foremne, lub nie foremne) z równemi wyſokościami, tak ſię do ſiebie maią, iak ich podſtawy.

2. Dwa Oſtrosłupy z równemi podſtawami, tak ſię do ſiebie maią, iak ich wyſokości.

3. Dwa Oſtrosłupy ſą równe, gdy ich podſtawy ſą w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości.

4. Dwa Oſtrosłupy równe, maią podſtawy w ſtoſunku odwrotnym ich wyſokości, i wyraz liczebny bryłowatości Oſtrosłupa będzie znaleziony, gdy ſię weźmie trzecia część dwóch liczb rozmożonych, z których iedna znaczyłaby

wielkość powierzchni podstawy tego Ostrosłupa, a druga, wielkość iego wysokości.

100. *Uwaga.* Maiąc dane wliczbach, sześć krawędzi iakiego Ostrosłupa tróykątnego, można wyznaczyć bryłowatość tego Ostrosłupa.

Jakoż złożywszy Tròykąt z trzech takowych krawędzi, i uważaiąc go iak podstawę Ostrosłupa; a na trzech bokach tey podstawy, zrobiwszy trzy Tròykąty, na teyże samey, co i podstawa płaszczyznie, dawszy każdemu z nich za boki, po dwie krawędzie z trzech pozostałych; te Tróykąty będą ścianami Ostrosłupa. Kąt każdy bryłowy przy podstawie, składać się będzie, z kąta Tròykąta wziętego za podstawę, i z dwòch kątòw ścian dwòch przy podstawie. Ponieważ zaś te kąty są wiadome, więc będzie można wyznaczyć pochyłość ścian do podstawy, a wszczegulności będzie można wyrachować stosunek wysokości Ostrosłupa, do spólnego przecięcia tych dwòch ścian. Aże to spòlne przecięcie iest dane co do wielkości, więc doydziemy i wysokości Ostrosłupa, a zatym i iego bryłowatości,

ktora

ktòra zawisła od wyſokości Oſtrosłupa, i powierzchni iego podſtawy.

101. *Uwaga* 2. Można tę bryłowatość wyznaczyć i bez Trygonometryi, iako ſię to pokaże w Algebrze.

102. *Uwaga* 3. Gdy Oſtrosłup ieſt foremny, a zatym trzy ścian iego krawędzie ſą ròwne ; Kwadrat wyſokości Oſtrosłupa, ròwna ſię rożnicy kwadratu iedney krawędzi, od kwadratu promienia koła na podſtawie opiſanego. A przeto tą wyſokość może być bardzo łatwo w liczbach wyznaczona, bez pomocy Trygonometryi. Ten zaś ſpoſob poſtępowania przyſtoſować można do wſzyſtkich Oſtrosłupòw foremnych, iakażkolwiek byłaby liczbą ich bokòw w podſtawie.

Przykł. 1. Wyznaczyć bryłowatość Bryły nazwaney *Czworościanem* (Tetraedrum.)

Bok ieden Troykąta rownobocznego wyznaczywſzy przez liczbę 2, kwadrat wyſokości tego Tróykąta wyrazi ſię przez liczbę 3. Promień koła opiſanego ieſt $\frac{2}{3}$ tey wyſokości, więc kwadrat tego

pro-

promienia, iest $\frac{4}{9}$, kwadratu wyſokości Tròykąta, a zatym kwadrat tego promienia, iest $\frac{12}{9}$. Ze zaś kwadrat wyſokości tego Oſtrosłupa iest $4 - \frac{12}{9} = \frac{24}{9} = \frac{4 \times 6}{9}$ więc ſama wyſokość będzie $= \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Powierzchnia Tròykąta ſłużącego za podſtawę wyrazi ſię przez $\sqrt{3}$, a zatym bryłowatość Oſtroſłupa będzie wyrażona przez $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; to iest bryłowatość Oſtrosłupa tak ſię ma do bryłowatości Sześcianu ròwnego co do bokow Oſtrosłupowi, iak $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}$ do 12; albo iak 2 do $12\sqrt{2}$, albo iak 1 do $6\sqrt{2}$; albo nakoniec iak 1 do $\sqrt{72}$; ktòry to ſtoſunek bliſki ieſt ſtoſunku 2 do 17, albo 33 do 280, a bardzo mało rożni ſię od ſtoſunku 68 do 577.

Przykł. 2. Wyznaczyć bryłowatość Ośmiościanu foremnego.

Można ſobie Ośmiościan wyſtawić w myśli, iakoby złożony z dwoch Oſtroſłupów proſtych kwadratowych, ſtykaiących ſię z ſobą rownemi podſtawami.

Wyra-

Wyraziwfzy bok ieden Ośmiościanu tego, przez 2, kwadrat promienia koła opifanego na podftawie iednego z tych dwóch Oftrofłupów, będzie wyrażony przez 2, a kwadrat wyfokości tego Oftrofłupa wyraz fię przez różnicę między kwadratem z 2, to iest 4, i 2, to iest będzie $= 4 - 2 = 2$. Wyfokość zaś tego Oftrofłupa wyrazi fię przez $\sqrt{2}$; więc bryłowatość iednego tego Oftrofłupa będzie oznaczona przez $\frac{4\sqrt{2}}{3}$, a zatym bryłowatość Ośmiościanu przez $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Jeft tedy bryłowatość Ośmiościanu foremnego do bryłowatości Sześcianu równego co do wielkości boków, iak $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ do 8, albo iak $\sqrt{2}: 3$, który to ftofunek bliſki ieft ftofunkowi 8 do 17, albo 17 do 36, a bardzo mało różni fię od ftofunku 33 do 70.

103. *Uwaga* 3. Ponieważ ściany Oftrofłupa fą powierzchniami płaſkiemi i to ieſzcze tròykątnemi, wyznaczenie iego powierzchni, żadney nie podlega trudności. Gdy Oftrofłup ieft foremny, powierzchnia iego (oprocz podftawy) ró-

wna

wna będzie Tróykątowi, któryby miał za podstawę, obwod podstawy Ostrosłupa; a wysokość równą wysokości sciany któreykolwiek (ponieważ wszystkie są równe.)

Wyboczenie (Digressio) *o sposobie wyczerpania nazwanego po Łacinie* Methodus exhaustionis; *maiące służyć za wstęp do Rozdziałów następuiących.*

104. Sposob, którego się użyło dla dowiedzenia równości dwóch Ostrosłupów, których podstawy i wysokości są równe, na to wypada, aby okazać, iż każdy z tych Ostrosłupów zawarty iest między dwiema ilościami, których różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; to iest: że każdy Ostrosłup iest zawarty między summą Graniastosłupów na nim opisanych i summą Graniastosłupów weń wpisanych; i że tych dwòch summ różnica może być mnieysza od iakieykolwiek ilości naznaczoney; a tym bardziey każdego z tych Ostrosłupa różnica, od iedney z tych summ, może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona. Zkąd można było Ostrosłupom porownywanym do siebie przystosować to wszystko, cokolwiek się powiedziało o stosunku iedney

dney z tych ſumm, nap: ſummy Graniaſtoſłupów opiſanych na iednym Oſtrosłupie, do drugiey z tych ſumm, to ieſt do ſummy Graniaſtoſłupów w iednakiey liczbie, opiſanych na drugim Oſtrosłupie. Że zaś, gdy Oſtrosłupy miały równe podſtawy i wyſokości, te dwie ſummy Graniaſtoſłupów były równe; więc też i Oſtrosłupy, których różnica od tych dwóch ſumm może być mnieyſza, niż iakakolwiek ilość naznaczona, będą równe.

105. Gdyby dwa Oſtrosłupy miały tylko wyſokości równe, a podſtawy nierówne; możnaby tymże ſamym prawie ſpoſobem okazać, że ſą do ſiebie, iak ich podſtawy; a to ztądby ſię wniosło, że wtymże ſamym ſtoſunku byłyby do ſiebie ſummy Graniaſtosłupów opiſanych na każdym z tych Oſtrosłupow; i że każdy z tych Oſtrosłupów może ſię różnić od każdey z tych ſumm, odpowiadaiących ſobie, ilością mnieyſzą, niżeli ieſt iakakolwiek ilość naznaczona.

106. Ponieważ ten ſpoſób wnoſzenia ſtoſunku dwóch ilości, które bezśrednie z ſobą porównywać ieſt trudno, będzie barzo częſto używany w Rozdziałach

naſtę-

naſtępniących, przeto nie zawadzi okazać ieſzcze pewność iego na kilku przykładach, aby iuż potym nie trzeba było za każdym razem powtarzać całego ciągu takowego działania, ktòry zawſze ieſt iednakowy.

Przykł. 1. Niechby dowiedziono było, że dwa Ròwnoległoboki maiące ròwne wyſokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy. Trzeba ieſzcze dowieść, że i dwa Troykąty, ktòrych ròwne ſą wyſokości, maią ſię do ſiebie iak ich podſtawy. (W tym zaś ſtawiamy ſię mniemaniu, iakoby nam nie wiadomo było, że Tròykąt ieſt połową Ròwnoległoboku, teyże co on podſtawy i wyſokości.)

Tab. IV. Fig. 6. Niech będą dwa Tróykąty: ABC, abc. ròwney wyſokości, a z nie rownemi podſtawami; trzeba dowieść, że ſię tak maią do ſiebie, iak ich podſtawy; a to ztąd, że i Ròwnoległoboki iednakiey wyſokości ſą do ſiebie, iak ich podſtawy.

Podzielmy bok ieden nap. AC. na pewną liczbę części rownych. Przez wſzyſtkie punkta podziału poprowadźmy równoodległe od podſtawy; a na każdey z tych ròwnoodległych wpiſzmy i opiſzmy Tróy-

Tròykątowi ABC, Rownoległoboki, maiące za ſpolną wyſokość-ro'wne oddalenie dwoch naybliżſzych ròwnoodległych.

Ròżnica Ro'wnoległobokow opiſanych, od Ròwnoległobokow wpiſanych, ròwnać ſię będzie naywiękſzemu z nich Ròwnoległobokowi. Ta zaś ròżnica może być mnieyſzą zrobiona, niż iakikolwiek Ròwnoległobok naznaczony, odmieniwſzy go na inny Ro'wnoległobok, kto'ryby tę ſamę, co i Troykąt miał podſtawę, i kąt z nim przy podſtawie ſpolny, a potym podzieliwſzy drugi bok AC, Tróykąta na tyle części ro'wnych, aby każda z nich mnieyſza była od drugiego boku, Ro'wnoległoboku naznaczonego.

Gdyby to być mogło, abc dwa Tro'ykąty: ABC, abc. nie miały ſię do ſiebie, iak ich podſtawy; tedy ieden z tych Troykątow; nap: ABC, byłby do uczynienia tego ſtoſunku, nadto wielki, lub nadto mały.

Niechby więc, ieżeli to być może, trzeba powiękſzyć Tròykąt ABC, Ro'wnoległobokiem ABFE. aby ſię tak miał do Tròykąta abc, iak AB do ab.

Podziel-

Podzielmy bok AC. na tyle części równych, aby każda z nich mnieyſza była od linii AE; wpiſzmy potym i opiſzmy Tróykątowi Równoległoboki, w ſpoſób wyżey wyrażony. Niech będzie naywiękſzy z nich Równoległobok AGHB. Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych od ſummy Równoległobokow wpiſanych, uczyniona ieſt mnieyſzą, niżeli Równoległobok ABFE; tym bardziey zaś Różnica ſummy Równoległoboków opiſanych, na Tróykącie ABC, od tegoż Tróykąta, ABC, mnieyſza będzie, niżeli Równoległobok ABFE; a zatym ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych, mnieyſza ieſt od Równoległoboku ABFE, wraz wziętego z Tròykątem ABC.

Podzielmy i bok ac, Tróykąta abc, na tyleż części równych, na ile ich był podzielony bok AC; opiſzmy natym Tróykącie Równoległoboki, tak iak wyżey.

Równoległoboki opiſane, na tych dwóch Tróykątach, a odpowiadaiące ſobie, tak ſię mieć będą do ſiebie, iak podſtawy AB, ab, tychże Tróykątow; więc też i ſumma wſzyſtkich Równoległoboków opiſanych na Tróykącie ABC, tak ſię

mieć

mieć będzie do summy Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, iak podstawa AB, pierwszego Tróykąta, do podstawy ab, drugiego; to iest: przez przypuszczenie, iak summa, z Tróykąta ABC, i z Równoległoboku ABFE, do Tróykąta abc. A że zrobiliśmy pierwszy poprzednik mnieyszym od drugiego, więc też i pierwszy następnik byćby powinien mnieyszy od drugiego; to iest summa wszystkich Równoległoboków opisanych na Tróykącie abc, powinnaby być mnieysza od Tróykąta abc, co iędnak być nie może; a zatym stosunek podstaw tych dwóch Tróykątów, tenże sam iest, co i samych Tróykątow.

Podobnym sposobem możnaby okazać, że i drugi Tróykąt abc, nie powinien być powiększony, aby miał ten sam do Tróykąta ABC, stosunek, co i ich podstawy.

Przykł: 2. Niech Tróykąty ABC, abc, wystawuią dwóch Ostrosłupów przecięcia przechodzące przez wierzchołki C, c, i przez prostopadłe spuszczone od tych wierzchołków do podstaw Ostrosłupów. Niech te obadwa Ostrosłupy, będą iednakiey wysokości. Trzeba dowieść, że bryłowatości tych Ostrosłupów, tak się ma-

ią

ią do ſiebie, iak ich podſtawy, a to z własności Graniaſtoſłupów iednakowey wyſokości, które także w takim iak ich podſtawy ſtoſunku ſą do ſiebie, czego ſię iuż wyżey dowiodło.

Okaże ſię, w podobny ſpoſob, że opiſawſzy i wpiſawſzy iednemu z tych Oſtroſłupowi, Graniaſtoſłupy, równey wſzyſtkie wyſokości; różnica wpiſanych od opiſanych, równać ſię będzie naywiękſzemu Graniaſtosłupowi opiſanemu, i że można w to potrafić, aby ta róznica mnieyſza była niż iakikolwiek Graniaſtoſłup naznaczony; a tym bardziey różnica Oſtroſłupa od każdey z tych ſumm mnieyſza będzie, niżeli ten Graniaſtoſłup.

Wpiſawſzy i opiſawſzy drugiemu Oſtrosłupowi, tyle co i pierwſzemu Graniaſtosłupòw; ſumma tych wſzyſtkich Graniaſtosłupòw opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy opiſanych na drugim, iak podſtawa pierwſzego Oſtroſłupa, do podſtawy drugiego. Także i ſummy Graniaſtoſłupów wpiſanych, w tym ſamym ſtoſunku będą, co i podſtawy dwóch Oſtroſłupów.

Gdyby to albowiem być mogło, aby ſtoſunek dwóch tych Oſtroſłupow, nieròwny

wny był ſtoſunkowi ich podſtaw, tedy ieden z tych Oſtroſłupòw, byłby nap: nadto mały na ten ſtoſunek. Przydaymy mu więc tę ilość, ktorą powiękſzony, zachowa ten ſtoſunek, i zamieńmy tęż ilość na Graniaſtoſłup rówwney z nim podſtawy. Temu Oſtroſłupowi wpiſzmy i opiſzmy Graniaſtoſłupy iednakiey wyſokości, tak iednak małey, aby różnica ſumm Graniaſtoſłupów wpiſanych od opiſanych, mnieyſza była od różnicy naznaczoney; będzie tym bardziey różnica ſummy Graniaſtoſłupów opiſanych na tym Oſtroſłupie, od tegoż Oſtroſłupa mnieyſza, niżeli różnica naznaczona; a zatym ſumma tych Graniaſtosłupòw mnieyſza będzie niżeli ſumma z Oſtroſłupa i z różnicy naznaczoney.

Na drugim Oſtroſłupie opiſzmy tyleż co i na pierwſzym Graniaſtoſłupòw.

Summa wſzyſtkich Graniaſtoſłupòw opiſanych na pierwſzym Oſtrosłupie, tak ſię mieć będzie do ſummy Graniaſtoſłupòw opiſanych na drugim Oſtroſłupie, iak podſtawa pierwſzego Oſtroſłupa, do podſtawy drugiego; to ieſt: iak ſumma z pierwſzego Oſtroſłupa, i z różnicy iego mniemaney, do drugiego Oſtroſłupa.

Aże

Aże ſię pokazało, iż pierwſzy poprzednik mnieyſzy ieſt od drugiego, więc i pierwſzy następnik powinienby być mnieyſzy od drugiego, co iednak być nie może.

Więc ſtoſunek dwóch tych Oſtroſłupow, nie rożni ſię od ſtoſunku ich podſtaw.

107. *Uwaga.* Użyliśmy iuż tego ſpoſobu, mówiąc o kwadrowaniu koła, w Części I. Dowiodłſzy albowiem, iż obwody dwóch Wielokątów foremnych, z iednaką liczbą boków, wpiſanych, lub opiſanych, dwóm kołom, tak ſię do ſiebie maią, iak tych kół promienie; pokazawſzy oraz, iż różnica obwodu koła, od obwodu Wielokąta wpiſanego, lub opiſanego, mnieyſzą być może od iakievkolwiek ilości naznaczoney, wywiedliśmy ztąd proporcyonalność okręgów kół, do ich promieni. Dowiedliśmy także równości koła z Tróykątem maiącym za wyſokość promień iego, a za podſtawę, okrąg; a to z podobney właſności Wielokąta na kole opiſanego.

W którymkolwiek z tych przykładów, nap: w oſtatnim, koło ieſt granicą między Wielokątami wpiſanemi, i opiſanemi, do

którey

którey każdy z nich, tym bardziey się zbliża, im więceyboków mu damy, tak dalece, że przyiść można do tego, iż ich obwody różnić się od siebie będą mnieyszą ilością, niż iakakolwiek ilość naznaczona, atym mniey ieszcze różnić się będą ich obwody od okręgu koła. Wielokąty podobne na dwóch kołach opisane, zawsze tę maią własność, iż są proporcyonalnemi tychże kół promieniom. Łącząc te z sobą własności, wypadło z nich, że i granice tych Wielokątów, to iest koła, tęż samę własność maią; lubo choćby ie na więcey coraz cząstek podzielić (byleby ich liczba była skończona) nieprzyidziemy nigdy do tego, abyśmy cale zgubili tę różnicę która zachodzi między Wielokątem, i kołem, to iest, abyśmy Wielokąt cale na koło iemu równe zamienili.

Ten sposób postępowania, nazywa się *sposobem wyczerpania* (Methodus exhaustionis) używanym bardzo często u dawnych, którym się to, i sprawiedliwie niezdawało, aby linije krzywe uważać iak złożone z liczby bardzo wielkiey, maleńkich liniy prostych; powierzchnie zaś krzywe, aby uważać iak zbior bardzo wielu powierzchni płaskich, małości nad-

zwyczayney; bryły także krzywe, aby uważać iak *Wielościany* (Polyedra) bardzo wielką liczbę, boków maiące.

Po tych, które ſię tu dały obiaśnieniach, obeydzie ſię w naſtępuiących podaniach, bez powtarzania za każdym razem całego ciągu tego ſpoſobu *wyczerpania*. Doſyć będzie okazać, że powierzchnie krzywe i Bryły niemi zakończone, o których mamy mówić, zawarte zawſze ſą między powierzchniami lub Bryłami, o których iuż mowiliśmy, a które mogą ſię rożnić od ſiebie mnieyſzą ilością, niż iakakolwiek ilość podana. Gdy zaś przyidzie mówić o ścianach Brył, o ich *warſtach* (laminæ) i t. d., tedy rozumiem, że przez poprzedzaiące obſzerne obiaśnienia, doſyć ſię wytłumaczyło, iak dalecy być powinniśmy od uważania powierzchni krzywych, iakoby złożonych z płaſzczyzn, i od uważania Brył, iakoby złożonych z powierzchni uſłanych iednych nad drugiemi.

ROZ-

ROZDZIAŁ VII.

O Walcach.

180. Niech będą dwa koła równe nakreślone na dwòch płaszczyznach rownoodległych. Przez liniią łączącą ich środki, niech przechodzi iakakolwiek inna płaszczyzna. Niech będą złączone inną liniią końce dwòch promieni znayduiących się po iedney stronie linii łączącey środki, i służących za spolne przecięcia tey płaszczyzny z płaszczyznami dwòch koł; niechay ta liniia końce dwóch promieni łącząca obraca się rownym wszystkich iey punktòw ruchem, około okręgòw tych dwòch koł. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii naznaczona, nazywa się *powierzchnią Walcową*. Bryła zakończona temi dwoma kołami, i tą powierzchnią zowie się *Walcem* (Cylinder:) Liniia prosta łącząca środki tych dwòch koł, nazywa się *Osiąte*go Walca. (Axis) Dwa koła na ktòrych się Walec kończy, nazywaią się iego *podstawami*. Prostopadła spuszczona od punktu ktòregokolwiek, iedney z tych podstaw do płaszczyzny podstawy drugiey, nazywa się *wysokością* Walca. Gdy oś

Walca, albo liniia łącząca środki dwòch pòdſtaw iego, proſtopadłą ieſt do płaſzczyzn podſtaw, Walec zowie ſię *proſtym*, gdy zaś ta oś ieſt pochyłą do tychże płaſzczyzn, wtedy Walec zowie ſię *ukośnym*.

109. *Wnioſek.* Liniia robiąca obrotem ſwoim powierzchnią walcową, ròwnoodległą ieſt w początkowym ſwoim położeniu, od oſi walca [bo ta liniia z oſią, czyni dwa boki przeciwne w Czworokącie tym, którego dwoma innemi bokami, ſą dwa promienie kol ròwne i rôwnoodległe). Ze zaś ta liniia zawſze ieſt od pierwſzego ſwego położenia ròwnoodległą, więc zawſze będzie ròwnoodległą od oſi. Wzaiemnie, gdy przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey pociągniemy liniią, równoodległą od oſi, ta liniia zmieſza ſię z linią ktòra obrotem ſwoim kreśli powierzchnią Walca, a przez tenże punkt przechodzi, i cała ta liniia znaydować ſię będzie na powierzchni walcowey. Liniia ròwnoodległa od oſi, a przechodząca przez punkt ktòrykolwiek powierzchni walcowey, nazywa ſię *bokiem* Walca; wſzyſtkie zatym boki Walca ſą równe, a wſzczegulności rownaią ſię oſi.

110.

110. *Twierdz.* 1. Przeciąwszy Walec płaszczyzną równoodległą od podstawy, przecięcie to będzie kołem.

Niech będzie CAac, połową przecięcia Walca, od płaszczyzny przechodzącey przez oś iego Cc, i niech BD będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey równoodległey od podstawy. *Tab. V. Fig.* 1.

Przecięcie Walca przez tę drugą płaszczyznę, będzie kołem.

Dowodz: Bok Aa, Walca iest od osi Cc równoodległym; przecięcia także BD, CA płaszczyzny przechodzącey przez oś, i dwóch płaszczyzn równoodległych, są równoodległemi; więc Czworokąt: ACBD, iest Równoległobokiem, a zatym bok BD, równa się bokowi AC.

Tymże sposobem okazać można równość wszystkich liniy prowadzonych od punktu B, do każdego punktu przecięcia powierzchni Walcowey, przez płaszczyznę równoodległą od podstawy; a zatym to przecięcie iest kołem, którego środkiem, punkt B; i wszystkie takie przecięcia są sobie równe, a wszczególności, równe są podstawie.

111.

111. *Wniosek.* Ztąd wynika inny sposob. ktòrym wystawić sobie można *rodzenie się* (generatio) iakiegokolwiek Walca, to iest przez ruch koła taki, ktòrymby się to koło w ròwney zawsze od pierwszego swego położenia odległości posuwało, a ieden z punktów iego nie schodził nigdy z linii prostey daney co do iey położenia.

W szczegulności zaś, Walec prosty, można uważać iakoby zrobiony obrotem Ròwnoległoboku prostokątnego, około iednego z bokòw iego.

112. *Twierdz:* 2. Powierzchnia krzywa (g) Walca prostego, ròwna się Prostokątowi, ktòryby miał za podstawę, okrąg podstawy Walca, a za wysokość, bok Walca.

Dowodz: Wpiszmy w podstawę Walca, i opiszmy na niey dwa Wielokąty foremne, z ròwną liczbą bokòw, i na tych Wielokątach, iak na podstawach, uważaymy iakoby zrobione Graniastosłupy proste,

(g) *Powierzchnią krzywą Walca nazywamy tę, w ktòrą nie wchodzą podstawy Walca.*

ſte, teyże co i Walec wyſokości; powierzchnie pobocznych ścian tych dwóch Graniaſtosłupów równe będą względem Proſtokątów maiących wyſokość Walca; podſtawy zaś równe obwodom tych Wielokątów, a zatym te dwie powierzchnie pobocznych ścian Graniaſtosłupów, tak ſię mieć do ſiebie będą, iak obwody tychże Wielokątów. Tym mniey więc różnić ſię od ſiebie będą te dwie powierzchnie, im mniey brakować będzie tym Wielokątom do rowności, to ieſt, im większa liczba będzie ich boków; i różnica tych powierzchni mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a tym bardziey powierzchnia krzywa, może ſię mniey ieſzcze różnić od iedney z tamtych powierzchni; więc (podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale XIII. Części I) powierzchnia krzywa Walca proſtego, równa ſię Proſtokątowi maiącemu wyſokość tego Walca, a podſtawę równą okręgowi podſtawy iego.

113, *Wnioſki* 1. Powierzchnie krzywe Walców proſtych, iednakiey wyſokości, tak ſię do ſiebie maią, iak promienie ich podſtaw.

2 Po-

2. Powierzchnie krzywe Walców prostych maiących równe podstawy, są do siebie, iak ich wysokości.

3. Powierzchnia cała Walca prostego, równa się Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg podstawy Walca, a za wysokość summę z wysokości Walca, i z promienia podstawy iego, (ponieważ summa z powierzchni dwòch podstaw Walca, rowna iest Prostokątowi maiącemu za podstawę okrąg, a za wysokość, promień iedney z tych podstaw). Jest zatym powierzchnia cała Walca prostego proporcyonalna Prostokątowi, ktòryby miał za boki, promień podstawy Walca, i summę z tegoż promienia i z wysokości walca; (gdyż stosunek okręgu do promienia, iest iednostaynym,)

114. *Uwaga*. Można okazać, iż wyznaczenie powierzchni krzywey Walca ukośnego, zawisło od wyznaczenia obwodu przecięcia Walca tego, przez płaszczyznę prostopadłą do iego osi; ale że wyznaczenie tego obwodu, większey niż początkowey Geometryi wiadomości wyciąga, przeto nie może być przez nię wyznaczona i powiezchnia krzywa Walca ukośnego.

115. *Twierdz:* 3. Dwa Walce równe ſą w bryłowatości, których tak podſtawy jako i wyſokości, ſą równe.

Dowodz: Wpiſawſzy, i opiſawſzy podſtawom tych dwóch Walców, Wielokąty foremne, o iednakowey liczbie boków, a zrobiwſzy na tych Wielokątach, Graniaſtoſłupy równey z Walcami wyſokości, maiące ściany równoodległe względem oſi tych Walców; rożnica Graniaſtoſłupa opiſanego na iednym z tych Walców, od Graniaſtoſłupa w tenże Walec, wpiſanego, równać ſię będzie Graniaſtoſłupowi maiącemu tę ſamę, co tamte dwa wyſokość, a podſtawę równą różnicy dwoch ich podſtaw. A że różnica tych dwóch podſtaw, mnieyſza być może, niż iakakolwiek ilość naznaczona; więc też i różnicę dwoch Graniaſtoſłupow, wpiſanego i opiſanego, można uczynić mnieyſzą od iakieykolwiek ilości naznaczoney, a tym bardziey różnica iednego z tych Graniaſtoſłupa, od Walca może być mnieyſzą uczyniona, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Że zaś dwa Graniaſtoſłupy podobne, nap: opiſane na tych dwoch Walcach ſą równe, więc też i te dwa Walce ſą ró-

wne

wne, (podług tego co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania.)

116. *Twierdzenie* 4. Walce z równemi podſtawami, maią ſię do ſiebie, iak ich wyſokości.

117. *Twierd*, 5. Walce z równą wyſokością maią ſię do ſiebie, iak ich podſtawy.

Dowodzenie tych dwóch Twierdzeń to ſamo ieſt prawie, co i dowodzenie Twierdzenia 3; położywſzy ſtoſunki nierówności podſtaw, lub wyſokości, na mieyſce ſtoſunków równości.

118. *Wnioſki.* Cokolwiek ſię powiedziało o porownywaniu Graniaſtoſłupow maiących podſtawy rożnego gatunku, wſzyſtko to przyſtoſować można do porownywania Walcow z Graniaſtoſłupami. Walec rówuy naprzykład ieſt iakiemukolwiek Graniaſtoſłupowi maiącemu rowną z nim podſtawę i wyſokość. Walec tak ſię ma Graniaſtoſłupa teyże co on wyſokości, iak podſtawa tego Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, a zatym Walec tak ſię ma do Graniaſtoſłupa teyże co i on wyſokości, a którego, podſtawa

ieſt

ieſt Wielokątem opiſanym na podſtawie Walca, iak podſtawa Walca, do podſtawy Graniaſtoſłupa, to ieſt, iak obwod podſtawy Walca, do obwodu podſtawy Graniſtoſłupa; nap: Walec, ktòrego wyſokość ròwna ſię średnicy podſtawy iego, tak ſię ma do Sześcianu tey średnicy, iak okrąg koła, do teyże średnicy wziętey 4 razy.

Gdy Walec ròwny ieſt Graniaſtoſłupowi w bryłowatości, wyſokość ich będzie w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, i znowu, ieżeli wyſokości ſą w ſtoſunku odwrotnym podſtaw, tedy Walec ròwna ſię Graniaſtoſłupowi.

Stoſunek dwòch Walców, może podobnie, iak i ſtoſunek Graniaſtoſłupow, wyłożonym być w liniiach ſpoſobem naſtępuiącym: Wyraźmy w liniiach ſtoſunek ich podſtaw; znalazſzy trzecią proporcyonalną do promienia Walca pierwſzego, i do promienia Walca drugiego. Do wyſokości Walca pierwſzego, do wyſokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, ſzukaymy czwartey proporcyonalney; ſtoſunek promienia Walca pierwſzego, do tey czwartey proporcyonalney, ròwny będzie ſtoſunkowi

bryło-

bryłowatości pierwszego Walca, do bryłowatości drugiego.

Przykład liczebny. Niech będzie promień podstawy drugiego Walca, trzy razy tak wielki iak promień podstawy pierwszego; wysokość zaś drugiego Walca, niech będzie cztery razy tak wielka, iak wysokość pierwszego. Trzecia proporcyonalna do promienia Walca pierwszego i do promienia Walca drugiego, będzie 9. razy tak wielka, iak promień pierwszego Walca; a ponieważ wysokość drugiego Walca, 4 razy iest tak wielka iak wysokość pierwszego, będzie więc czwarta proporcyonalna do wysokości pierwszego Walca, do wysokości drugiego, i do tey trzeciey proporcyonalney, cztery razy tak wielka, iak ta trzecia proporcyonalna, to iest: 36 razy tak wielka iak pierwszy promień, a zatym drugi Walec zawiera w sobie pierwszy, razy 36. Jakoż, gdyby podstawa drugiego Walca zawierała w sobie razy 9 podstawę pierwszego, a wysokość ich była rowna, tedy drugi Walec byłby 9 razy tak wielki iak pierwszy; a że nadto wysokość drugiego Walca zawiera w sobie razy 4, wysokość pierwszego, będzie więc i z tey miary drugi Walec 4

razy

razy tak wielki, iak pierwſzy, a z obydwóch razem tych miar będzie 36 razy tak wielki, iak pierwſzy.

Co ſię zaś tycze miary liczebney iakiego Walca, ta będzie znaleziona, wyrazìwſzy nayprzod w liczbach, powierzchnią iego podſtawy, (podług tego co ſię powiedziało o powierzchni koła,) a potym rozmnożywſzy tę liczbę przez inną, oznaczaiącą wyſokość Walca.

119. *Uwaga.* Wyznaczenie dokładne tak powierzchni krzywey Walca proſtego, iakoteż i całey iego powierzchni; to ieſt dokładne porównywanie tey powierzchni z powierzchnią proſtą, nap: z kwadratem, zawiſło od ſkwadrowania koła; a zatym od wyproſtowania iego okręgu. Toż mowić i o bryłowatości Walca, czyli o dokładnym porownywaniu tey bryłowatości z bryłowatością nap: Sześcianu.

Wyznaczenie wielkości kawałkòw Walca, maiących za podſtawy, wycinki, lub odcinki koła, zawiſło także od wyznaczenia Walca; ponieważ te kawałki tak ſię maią do Walca całego, ktòrego

ſą

ſą częściami, iak ich podſtawy do koła ſłużącego za podſtawę temu Walcowi. (h)

ROZDZIAŁ VIII.

O Oſtrokręgach.

120. DEfin: Niech będzie koło nakreślone naiakiey płaſzczyźnie i niech od punktu nad tą płaſzczyzną znayduiącego ſię, wyciągniona liniia lub nitka, obraca ſię około okręgu, tego koła. Powierzchnia krzywa obrotem tym linii lub nitki naznaczona nazywa ſię *powierzchnią Oſtrokręgu*; Bryła zakończona przez tę powierzchnią i koło, około którego nitka ſię obracała, nazwiemy *Oſtrokręgiem* (Conus), koło, na którym Oſtrokrąg ſtoi, nazwiemy *podſtawą* iego; *wierz-*

(h) *Lubo niektóre części powierzchni Walcowey ſame przez ſię wyznaczyć można; nie można iednak wyznaczyć ich ſtoſunku do całey powierzchni Walca. Toż mówić i o częściach Walca, których bryłowatości mogą być wyznaczone. Ale ta rzecz bardziey ieſt ciekawa, niż użyteczna, dla tego też doſyć ieſt o tym namienić.*

wierzchołkiem zaś, punkt ten, od którego nitka była wyciągniona. Liniia od tego wierzchołku do środka podſtawy prowadzona, nazywa ſię *Oſią* Oſtrokręgu, a proſtopadła ſpuſzczona od wierzchołku do płaszczyzny podſtawy: nazywa ſię *wyſokością*. Gdy oś ieſt proſtopadłą do płaſzczyzny podſtawy, Oſtrokręgu; Oſtrokrąg nazywa ſię *proſtym*; gdy zaś ta oś nie ieſt do płaſzczyzny podſtawy proſtopadłą, Oſtrokrąg nazywa ſię *ukośnymi*

121. *Wnioſek.* Poprowadziwſzy liniią od wierzchołku Oſtrokręgu do którego-kolwiek punktu Okręgu podſtawy iego, ta liniia zmieſza ſię wtedy z nitką rodzącą obrotem ſwoim, powierzchnią Oſtrokręgu, gdy ta nitka przechodzić będzie przez ten punkt okręgu podſtawy; a zatym ta liniia cała będzie na powierzchni krzywey tego Oſtrokręgu.

Liniia poprowadzona od wierzchołku Oſtrokręgu powierzchni iego krzywey, aż do okręgu podſtawy, nazywa ſię *bokiem* Oſtrokręgu.

122. *Twierdz:* 1. Gdy płaſzczyzna przechodząca przez wierzchołek Oſtrokręgu iakiegożkolwiek przecina go, przecięcie to ieſt zawſze Tróykątem.

Dowo-

Dowodz: Liniie poprowadzone na tey płaſzczyznie od wierzchołku Oſtrokręgu, do dwòch punktòw okręgu, w ktòrych go ta płaſzczyzna przecina, będą bokami Oſtrokręgu, i ſpolnemi powierzchni iego krżywey, z tą płaſzczyzną przecięciami; a zatym przecięcie Oſtrokręgu przez tę płaſzczyznę, będzie Tròykątem maiącym za podſtawę, ſpolne przecięcie tey płaſzczyzny, z płaſzczyzną podſtawy Oſtrokręgu, a za boki, dwie liniie poprowadzone od wierzchołku, do punktòw przecięcia okręgu, od płaſzczyzny przechodzącey przez wierzchołek.

123. *Twierdz*: 2. Gdy Oſtrokrąg przecięty ieſt przez płaſzczyznę ròwnoodległą od iego podſtawy, przeciecie to ieſt kołem.

Tab. V. Fig: 2. Niech Tròykąt ASB wyraża iakiekolwiek przecięcie Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez iego Oś, SC; niech liniia DFE wyraża ſpolne przecięcie tey płaſzczyzny i inney ròwnoodległey od podſtawy.

Tròykąty SCB, SFE, ſą podobne; więc SC : CB = SF : FE. Aże płaſzczyzna przecinaiąca Oſtrokrąg ròwnoodlegle od podſtawy

podſtawy, przechodzi przez punkt nieruchomy F, a przeto trzy pierwſze wyrazy tey proporcyi ſą ſtałe iakiżkolwiek będzie promień podſtawy przez którą, a razem i przez oś przechodzi płaſzczyzna; więc też i czwarty wyraz ieſt ſtałym. Poprowadziwſzy tedy liniie od punktu F, do okręgu przecięcia, te liniie równe zawſze będą, a zatym to przecięcie ieſt kołem, którego punkt F, ieſt środkiem.

124. *Wnioſki.* Te kół powierzchnie tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty ich promieni, albo iak kwadraty odległości ich od wierzchołka. (To podanie ieſt wielce przydatne w Fizyce.)

Gdy Oſtrokrąg ieſt proſtym, wtedy wſzyſtkie płaſzczyżny, równoodległe od podſtawy, ſą do Oſi proſtopadłemi; a ztąd, można uważać Oſtrokrąg proſty, iakoby zrobiony obrotem Tróykąta proſtokątnego, około iednego z ramion kąta iego proſtego. To ramie będzie Oſią Oſtrokręgu, drugie, naznaczy powierzchnią podſtawy, przeciwproſtokątna zaś, naznaczy powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

125. *Twierdz: przybrane* 1. Gdy linia poprowadzona na płaszczyznie podstawy Ostrokręgu, dotyka się tey podstawy; płaszczyzna przez tę liniią i przez bok Ostrokręgu do punktu dotknięcia, ciągniony, przechodząca, wszystkie inne punkta swoie mieć będzie za Ostrokręgiem; to iest: nic spolnego z Ostrokręgiem nie będzie miała, oprocz boku, przez który przechodzi,

Tab. V. Fig. 3. Niech będzie SCA, przecięcie Ostrokręgu od płaszczyzny przechodzącey przez Oś SC, i przez podstawy promień CA. Niech AT, będzie styczną z tą podstawą, w końcu A, promienia CA; Płaszczyzna przechodząca przez linie: SA, AT, będzie mieć za Ostrokręgiem, wszystkie punkta swoie, które nie są w linii SA.

Dowodz: Niech płaszczyzna iakakolwiek równoodległa od podstawy, Ostrokrąg przecina; niech *ca*, będzie spolnym przecięciem tey płaszczyzny, i drugiey przez oś przehodzącey; niech ieszcze *at* będzie przecięciem teyże płaszczyzny, i drugiey przechodzącey przez linie: SA, AT. Liniie: *ca*, *at*, będą równoodległemi względem liniy: CA, AT;

a zatym

a zatym kąt *cat*, będzie równy kątowi CAT. Aże kąt CAT iest proſtym, więc proſtym także będzie i kąt *cat*; a zatym, oprocz punktu *a*, linii *at*, każdy inny punkt, teyże linii, będzie w większey od środka *c*, odległości, niżeli promień *ca*, to iest: niżeli odległość punktu na powierzchni Oſtrokręgu, i oraz na płaſzczyznie *cat*, znayduiącego ſię, od punktu Oſi, do teyże płaſzczyzny należącego. Każdy tedy inny punkt tey linii *at*, oprocz punktu *a*, ieſt za okręgiem.

126. *Defin*: O tey płaſzczyznie mowi ſię, iż ſię *dotyka Oſtrokręgu*, ktòra iedną tylko linią ma ſpolną z powierzchnią krzywą Oſtrokręgu.

127. *Wnioſek*. Opiſawſzy Wielokąt na podſtawie Oſtrokręgu, a przez wierzchołek tego Oſtrokręgu, i przez boki Wielokąta przeciągnąwſzy płaſzczyzny; ponieważ te boki Wielokąta opiſanego, ſłużyć będą za podſtawy ścian Oſtrogranu, wierzchołek zaś iego, będzie ten ſam, co i wierzchołek Oſtrokręgu, więc ściany tego Oſtrogranu dotykać ſię będą powierzchni Oſtrokręgu. Oſtrogran ten nazywa ſię opiſanym na Oſtrokręgu inny zaś, któryby ſpolny z Oſtrokręgiem

 miał

miał wierzchołek, a za podſtawę Wielokąt wpiſany w podſtawę Oſtrokręgu, nazywałby ſię w Oſtrokrąg *wpiſanym.*

128. *Twierdz: przybrane* 2. Maiąc dany Oſtrokrąg proſty, można weń wpiſać, i opiſać na nim dwa Oſtrograny foremne, ktòrychby ſtoſunek powierzchni ściennych bardziey ſię zbliżał do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek naznaczony ſtoſunek nieròwności.

Powierzchnie ścienne tych dwóch Oſtrogranòw, ròwnaią ſię Tróykątom, maiącym za podſtawy, obwody podſtaw Oſtrogranów, a wyſokości zaś, ròwne wyſokościom iedney z ścian każdego Oſtrogranu; a zatym tak ſię do ſiebie maią te Oſtrograny, iak te dwa Tròykąty. Aże podſtawy tych dwòch Tròykątòw, tak ſię maią do ſiebie, iak proſtopadłe ſpuſzczone od środku, do dwóch ktòrychkolwiek bokòw podſtaw Oſtrogranu; więc te powierzchnie ścienne, tak ſię też do ſiebie mieć będą, iak Tròykąty ròwney z ścianami Oſtrogranów wyſokości, a maiące za podſtawy, te proſtopadłe; albo iak Proſtokąty, teyże z dwiema temi Tróykątami podſtawy i wyſokości. Ze zaś ſtoſunek takich dwóch

Pro-

Proſtokątów, może być bardziey przybliżonym do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, to ſię tak dowodzi.

Niech będzie SCA, przecięcie Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przechodzącey przez oś tego Oſtrokręgu i przez wyſokości SA, SB dwoch ścian Oſtrogranów foremnych, i maiących za podſtawy Wielokąty z równą liczbą boków; ieden z tych Oſtrogranów niech będzie opiſanym na Oſtrokręgu, a drugi weń wpiſanym. *Tab. V. Fig. 4.*

Powierzchnia ścienna Oſtrogranu opiſanego proporcyonalna ieſt z Proſtokątem CA przez SA, a powierzchnia ścienna Oſtrogranu wpiſanego, proporcyonalna ieſt Proſtokątowi CB, przez SB. Poprowadźmy BD równoodległą od SA. Powierzchnia ścienna Oſtrogranu, maiącego za podſtawę, podſtawę Oſtrogranu wpiſanego, a za wyſokość liniią CD, takby ſię miała do powierzchni ścienney, Oſtrogranu opiſanego, iak Proſtokąt: CB × BD do Proſtokąta CA × AS; to ieſt (dla podobieńſtwa Tróykątów SAC, DBC) iak kwadrat z CB do kwadratu z CA; albo iak powierzchnie podſtaw, dwóch Oſtro-

Oſtrogranów. A że ſię dowiodło w Rozdziale o kwadrowaniu koła w Części I. że te dwie powierzchnie bardziey mogą być zbliżonemi do ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności, więc też i ſtoſunek powierzchni ściennych, tych dwóch Oſtrogranów, bliżſzy może być ſtoſunku równości, niż iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Oſtrogranu, którego SCA ieſt przecięciem, mniey ſię różni od Oſtrogranu, którego przecięciem ieſt: SCB, niżeli od Oſtrogranu, którego przecięciem ieſt: DCB, więc tym bardziey ſtoſunek powierzchni ściennych dwóch Oſtrogranów, iednego wpiſanego, drugiego opiſanego, mniey ſię różnić może od ſtoſunku równości, niżeli od tegoż ſtoſunku różni ſię iakikolwiek dany ſtoſunek nierówności.

129. *Twierdz. 3.* Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego, równa ſię Tróykątowi maiącemu za podſtawę obwod podſtawy Oſtrokręgu, a za wyſokość bok Oſtrokręgu.

Dowodz. Powierzchnia krzywa Oſtrokręgu proſtego ieſt Granicą między powierz-

wierzchniami ściennemi Ostrogranów prostych weń wpisanych i na nim opisanych. Aże stosunek takich dwóch powierzchni Ostrogranów, może być do stosunku równości bardziey przybliżonym, niżeli iakikolwiek dany stosunek nie równości, więc tym bardziey stosunek powierzchni Ostrokręgu prostego; do powierzchni iednego z tych Ostrogranów, nap: opisanego, mniey się różnić może od stosunku równości, niżeli się od tegoż stosunku różni iakikolwiek dany stosunek nierówności. Ze zaś powierzchnia ścienna Ostrogranu opisanego, równa się Tròykątowi maiącemu za wysokość, bok Ostrokręgu, a za podstawę obwod podstawy, tego Ostrogranu; więc (podług tego co się powiedziało o sposobie wyczerpania, a wszczególności w Rozdziale o kwadrowaniu koła, że powierzchnia koła, równa się Tròykątowi maiącemu za podstawę obwod koła, a za wysokość, promień iego): Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, iest też równa Tròykątowi, któryby miał za podstawę obwod podstawy Ostrokręgu, a za wysokość bok iego.

130. *Wniosek.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego, równa się wy... cinko...

cinkowi koła, ktoreby miało za promień, bok Ostrokręgu, a ktòrego łuk ròwnyby był w długości okręgowi podstawy Ostrokręgu; a to dla tego, że powierzchnia tego wycinku, ròwna się także Tròykątowi, maiącemu za wysokość bok Ostrokręgu, a za podstawę łuk tego wycinku, albo okrąg podstawy Ostrokręgu.

131. Dla znalezienia ważności kątowey, tego wycinku, następuiąca czyni się proporcya: Jak się ma bok Ostrokręgu, do promienia podstawy iego, tak się ma 360° do ważności kątowey, ktòrey szukamy.

Jakoż, gdyby bok Ostrokręgu, był dwa, trzy, i t.d. razy większy od promienia podstawy, tedy okrąg cały maiący za promień bok Ostrokręgu. byłby dwa, trzy i t.d. razy większy od okręgu podstawy; a zatym i łuk pierwszego koła, ktòryby się ròwnał okręgowi podstawy, byłby połową, trzecią, częścią, i t. d. okręgu, do ktòrego należy.

132. *Defin:* Niech będzie Ostrokrąg przecięty płaszczyzną ròwnoodległą od podstawy iego, Bryła zakończona z iedney strony, podstawą Ostrokręgu a z dru-

drugiey tym przecięciem, nazywa się *Ostrokręgiem ściętym* (Conus truncatus.)

133. *Twierdz. 4.* Powierzchnia krzywa Ostrokręgu prostego ściętego, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość, bok tego Ostrokręgu ściętego, a za podstawę liniią równą takiemu Okręgowi, którego promieniem byłaby połowa summy promieni do dwóch podstaw Ostrokręgu tegoż ściętego należących; to iest średnia arytmetyczna między dwoma temi promieniami.

Niech Tròykąt SCA, wyraża połowę przecięcia Ostrokręgu prostego, od płaszczyzny przechodzącey prześ oś iego. Niech tenże Ostrokrąg będzie ieszcze przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy, a spolnym tey płaszczyzny z pierwszą przecięciem, niech będzie: *ca.* Przecięcie: CAac, oznaczy przecięcie Ostrokręgu ściętego. Pociągniymy liniią AB, prostopadłą do boku SA, i równą Okręgowi koła, którego promieniem iest: CA. Tròykąt SAB, będzie równy powierzchni krzywey Ostrokręgu całego: poprowadźmy ieszcze liniią *ab*, równoodległą od AB, i spotykaiącą w punkcie *b*, liniią SB. Ta liniia *Tab. V. Fig. 5.*

ab,

ab, będzie też równa okręgowi koła, którego, promieniem ieſt: *ca*, a Tróykąt Sab, równać ſię będzie powierzchni krzywey Oſtrokręgu Sac; będzie zatym Czworokąt ABba, równy powierzchni krzywey Oſtrokręgu ściętego caCA.

Podzielmy teraz liniią Aa, na dwie części równe w punkcie: E. i poprowadźmy EF, równoodległą od AB.

Ta liniia EF, będzie równa okręgowi koła, którego promień równałby ſię linii: ED, toieſt średniey Arytmetyczney między promieniami, CA, i *ca*, dwóch podſtaw Oſtrokręgu ściętego; a przeto powierzchnia Czworokąta ABba, równa ſię Proſtokątowi AHGa, maiącemu za wyſokość, bok Aa, Oſtrokręgu ściętego, a za podſtawę liniią EF równą okręgowi średnie arytmetyczn e proporcyonalnemu, między okręgami dwóch podſtaw tegoż Oſtrokręgu.

134. *Uwaga* 1. Wyrażenie naſtępuiące powierzchni krzywey Oſtrokręgu proſtego, czyli to całego, czyli też ściętego, poſłuży nam, gdy mówić będziemy o powierzchni *kuli* (Sphera.)

Od

Od środku E, linii Aa, wyciągniymy liniią EI prostopadłą do Aa, spotykaiącą oś SC, w punkcie I. Poprowadźmy i drugą liniią aL, równoodległą od SC, a prostopadłą do AC.

Summa kątów IED, DEa, równa się kątowi prostemu; tak iako i summa kątów: AaL, DEa; więc te dwie summy są sobie równe; a zatym kąt IED, równa się kątowi AaL. Są tedy podobne, dwa Tròykąty prostokątne: IED, AaL, a zatym boki ich będą proporcyonalne; więc, JE : ED = Aa : aL, (albo Cc) a ztąd i okręgi, maiące za promienie, linije: IE, ED, są też do siebie, iak linije: Aa, Cc; a zatym Prostokąt z linii Cc, przez okrąg, którego liniia IE, byłaby promieniem, równałby się Prostokątowi z linii Aa, przez okrąg, któryby miał za promień, liniią ED. Aże ten drugi Prostokąt równy iest powierzchni krzywey Ostrokręgu ściętego; więc też i pierwszy byłby równy teyżeOstrokręgu ściętego powierzchni. Jest tedy powierzchnia krzywa Ostrokręgu ściętego, równa Prostokątowi maiącemu wysokość równą wysokości Ostroręgu ściętego, a podstawę równą okręgowi takiego koła, którego promieniem byłaby prostopadła, od środku boku Ostrokręgu ściętego wyciągniona, aż do

iego

iego osi, która to prostopadła iest czwartą geometrycznie proporcyonalną, do wysokości Ostrokręgu ściętego, do iego boku, i do średniey arytmetyczney między dwoma promieniami; co wszystko łatwo przystosować można i do Ostrokręgu ściętego.

135. *Uwaga 2.* Wyznaczenie więc dokładne powierzchni Ostrokręgu, lub iey części, zawisło od wyprostowania okręgu koła.

Co się tycze Ostrokręgu ukośnego, ieszcze cięższey iest wyznaczyć powierzchnią iego krzywą, niżeli Walca ukośnego; to zaś pochodzi z nierówności iego boków, a zatym z nierówności ścian Ostrogranów, z podstawami foremnemi, opisanych lub opisać się mogących na tym Ostrokręgu.

136. *Twierdz. przybrane* Bryłowatości dwóch Ostrogranów z podstawami foremnemi, iednego wpisanego w Ostrokrąg, a drugiego na nim opisanego, różnica może być mnieysza, niż iakakolwiek ilość naznaczona; to iest stosunek ich bryłowatości, może bardziey być przybliżonym do stosunku równości, niż iakikolwiek dany stosunek nierówności.

Dowodz:

Dowodz: Różnica tych dwóch Ostrogranów, równa się Ostrogranowi teyże co one wysokości, a którego podstawa byłaby równa różnicy ich podstaw. Aże stosunek tych podstaw, może być bardziey przybliżonym do stosunku równości, niż dany iakikolwiek inny stosunek nie równości, więc też i stosunek tych dwóch Ostrogranów, może się zbliżyć do stosunku równości bardziey niż inny dany iakikolwiek stosunek nie równości. Zamieniwszy różnicę dwóch Ostrogranów, na trzeci Ostrogran teyże co one wysokości, można będzie wpisać i opisać podstawie Ostrokręgu dwa Wielokąty, z równą liczbą boków, takie, którychby rożnica mnieysza była od podstawy tego trzeciego Ostrogranu, a tym bardziey ieden z Ostrogranów wystawionych na tych Wielokątach, równey z Ostrokręgiem wysokości, mniey się różnić będzie od Ostrokręgu, niż iakąkolwiek ilością naznaczoną.

137. *Twierdz.* 5. Bryłowatość iakiegokolwiek Ostrokręgu, iest trzecią częścią bryłowatości Walca równey z Ostrokręgiem podstawy i wysokości.

Dowodz: Ostrograny i Graniastosłupy *iednoimienne* (eiusdem nominis) wpisane, lub

lub opisane, pierwsze na Ostrokręgu a drugie na Walcu, iednakiey z niemi wysokości, są trzecią częścią pierwsze względem drugich. Aże te Ostrograny i Graniastosłupy mogą się różnić pierwsze od Ostrokręgu, drugie od Walca, na którym są nap. opisane, mniey niż iakąkolwiek daną ilością; więc (podług tego, co się powiedziało o sposobie wyczerpania) Ostrokrąg iest też trzecią częścią Walca.

138. *Wniosek.* Cokolwiek mowiliśmy o porównywaniu Walców, zawisłym od ich wysokości, i podstaw, można to wszystko i do Ostrokręgów przystosować, które trzecią ich są częścią; podobnie iakośmy i to co się mówiło o porownywaniu Graniastosłupòw, do Ostrogranów przystosowali. J tak.

1. Ostrokręgi, których podstawy są równe, maią się do siebie, iak ich wysokości.

2. Ostrokręgi, ktòrych wysokości są równe, maią się do siebie, iak ich podstawy.

3. Ostrokręgi, których bryłowatości są równe, maią podstawy w stosunku odwrotnym ich wysokości.

4.

4. Ostrokręgi, których podstawy maią się do siebie, w stosunku odwrotnym ich wysokości, są równe.

5. Stosunek dwóch Ostrokręgów w liniiach wyrażony, tak się znayduie: zamienia się stosunek podstawy iednego, do podstawy drugiego na stosunek linii do linii; znayduiąc trzecią proporcyonalną do promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, i do promienia podstawy drugiego. Zamienia się także stosunek wysokości pierwszego Ostrokręgu, do wysokości drugiego, na stosunek trzeciey proporcyonalney znalezioney, do czwartey. Stosunek promienia podstawy pierwszego Ostrokręgu, do tey czwartey proporcyonalney, równy będzie stosunkowi pierwszego Ostrokręgu, do drugiego.

6. Wyrażenie liczebne bryłowatości Ostrokręgu, znayduiemy; mnożąc liczbę oznaczaiącą wielkość powierzchni podstawy iego, przez liczbę oznaczaiącą wielkość wysokości, a potym tey liczby rozmnożoney biorąc część trzecią.

Wyznaczenie tedy dokładne bryłowatości Ostrokręgu, zawisło od wyznaczenia

nia dokładnego, iego podſtawy, a zatym od wyproſtowania okręgu koła.

Bryłowatość Oſtrokręgu, rowna ſię bryłowatości iakiegokolwiek Oſtrogranu, równey z Oſtrokręgiem wyſokości i podſtawy.

139. *Twierdz*: 6. Bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, którego powierzchnia podſtawy byłaby równa, powierzchni całey Oſtrokręgu proſtego, a wyſokość, równa promieniowi koła wpiſanego w Tróykąt równoramienny wyrażaiący przecięcie Oſtrokręgu proſtego od płaſzczyzny przez oś iego przechodzącey.

Niech będzie ASB przecięcie Oſtrokręgu proſtego, od płaſzczyzny przez oś iego przechodzącey.

Tab. V. Fig: 6. Niech będzie SC proſtopadła do AB, wyſokością, czyli oſią tego Oſtrokręgu. Podzielmy ieden z kątow przy podſtawie AB, nap: kąt A, na dwie równe części, przez liniią AD, i prowadźmy ią aż do punktu D, proſtopadłey SC; od tegoż punktu D, niech idzie proſtopadła

DE

DE do SA. Liniie równe DC, DE, będą promieniami, koła wpisanego w Tròykąt przechodzący przez oś Ostrokręgu.

Powierzchnia podstawy Ostrokręgu tak się ma do iego powierzchni krzywey, iak AC, do AS; a zatym powierzchnia podstawy, tak się mieć będzie do całey powierzchni Ostrogręgu, iak AC do AC+AS, albo iak AC^2 do AC (AC+AS); więc powierzchnia cała Ostrokręgu równa się kołu maiącemu za promień średnią geometryczną między promieniem AC podstawy Ostrogręgu, i summą z tego promienia i z boku Ostrokręgu. Aże liniia AD, dzieli kąt CAS na dwie równe części więc AS : AC = SD : CD; i AS+AC : AC = SD+CD : CD; a nakoniec (AS+AC)AC : AC^2 = SC : CD.

Więc Ostrokrąg maiący za promień podstawy, średnią geometryczną między AC, i AC+AS, a za wysokość liniią CD, miałby powierzchnią swoię, do powierzchni Ostrokręgu podanego, w stosunku odwrotnym wysokości; a zatym te dwa Ostrokręgi byłyby równe. Że zaś pod-

ſtawa pierwſzego Oſtrokręgu ieſt równa całey powierzchni Oſtrokręgu podanego; więc bryłowatość Oſtrokręgu proſtego, równa ſię bryłowatości Oſtrokręgu innego, maiącego podſtawę równą całey proſtego Oſtrokręgu powierzchni, a wyſokość równą promieniowi koła wpiſanego w Tròykąt, który ieſt przecięciem tego Oſtrokręgu od płaſzczyzny przechodzącey przez oś iego.

ROZDZIAŁ IX.

O Kuli.

140. DEfin: Niechby Połkole obracało ſię około ſwoiey średnicy. Okrąg iego przebiegnie, tym ſwoim obrotem powierzchnią krzywą, którą nazwiemy *Powierzchnią kuliſtą* (ſuperficies ſpherica); całe zaś połkole obiegnie mieyſce tą powierzchnią krzywą zakończone, które ſię nazywa *Kulą* (Sphera albo Globus).

Podczas tego obrotu, każdy punkt okręgu połkola, w iednakowey zawſze byłby od iego środka odległości; a zatym i każdy punkt powierzchni kuliſtey, w iednakowey też będzie odległości od tego środka.

Kula

Kula więc ieſt bryłą zakończoną przez powierzchnią krzywą, którey wſzyſtkie punkta iednakowo ſą odległe od pewnego punktu nazwanego *środkiem.*

Odległość środka od punktu którego-kolwiek powierzchni kuli, nazywa ſię *promieniem.* Liniia każda przechodząca przez środek kuli, a po obydwóch ſtronach kończąca ſię na iey powierzchni, nazywa ſię średnicą, i dwa razy ieſt większą od promienia. Ta zaś średnica, około którey obracaiąc ſię połkole, zrobiło kulę nazywa ſię *Oſią* kuli.

Gdybyśmy przecieli kulę płaſzczyzną przechodzącą przez iey środek, wſzyſtkie punkta przecięcia powierzchni kuliſtey, przez tę płaſzczyznę, byłyby iednakowo odległe od środka kuli, który na tymże ieſt przecięciu.

Więc takie przecięcie ieſt kołem maiącym za promień, promień kuli.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny, która przez iey środek przechodzi, nazywa ſię *wielkim kołem kuli.*

Dwa takie koła przecinaią ſię, iedno z drugim na dwie części równe.

N2 Jakoż

Jakoż ſpolne ich przecięcie przechodzi, przez środek kuli, a żatym i przez środek tak iednego, iak i drugiego koła; więc ieſt średnicą obydwòch. Aże średnica przecina koło na dwie równe części, więc i dwa koła wielkie kuli przecinaią ſię na dwie części rowne.

Gdyby kula przecięta była płaſzczyzną nie przechodzącą przez iey środek, ale proſtopadłą do oſi iey obrotu, przecięcie to kuli byłoby kołem od ſpolnego przecięcia tey płaſzczyzny z płaſzczyzną połkola, nakreślonym, pod czas obrotu tegoż połkola tworzącego kulę.

Ze zaś można ſobie wyſtawić w myśli, kulę daną, iakoby utworzoną przez obrot ktoregokolwiek połkola wielkiego, około iego średnicy, i kula z tego obrotu powſtała, iednakowey zawſze ieſt wielkości; więc gdziekolwiek przetniemy kulę płaſzczyzną, wſzędzie przecięcie iey, będzie kołem; ponieważ można wziąść za oś kuli, tę iey średnicę, ktora do tey płaſzczyzny ieſt proſtopadłą.

Przecięcie kuli od płaſzczyzny nie przechodzącey przez iey środek, nazywa ſię *małym kołem.*

Gdy

Gdy przez koniec promienia kuli, przechodzi płaszczyzna prostopadła do tego promienia, wszystkie inne punkta tey płaszczyzny będą za kulą.

Jakoż odległość którego kolwiek innego punktu tey płaszczyzny, od środka kuli, iest przeciwprostokątną Tróykąta prostokątnego, który ma promień, za iedno ramie kąta prostego, a za drugie, odległość tego punktu, od końca promienia. Wszystkie tedy inne punkta tey płaszczyzny są pośrodka odległe większą ilością, niżeli iest promień, a zatym są za kulą.

O płaszczyznie, nie maiącey ani mieć mogącey więcey nad ieden punkt spolny z kulą, mówi się, iż się kuli *dotyka*. Ta zaś płaszczyzna powinna być prostopadłą do promienia, poprowadzonego do punktu dotknięcia.

Przez punkt dotknięcia pociągnąwszy na tey płaszyznie iakąkolwiek liniią prostą, ta będzie prostopadłą do tego promienia, który do punktu dotknięcia byłby poprowadzony; a zatym liniia ta, będzie styczną z tym kołem, któreby było prze-

cięciem

cięciem kuli od płaſzczyzny przechodzącey przez tę liniią, i przez ten promień.

Jakośmy ſię zatrudniali wyżey około Walcow, i Oſtrokręgow proſtych, tak teraz zatrudniać ſię będziemy około powierzchni i bryłowatości kuli, i iey części rożnych.

141. *Twierdz. przybrane.* Niech będzie łuk koła, przez ktòrego punkt średni poprowadziliśmy ſtyczną, aż do iey zeyścia ſię z obydwoch ſtron, z promieniami przez końce tego łuku przeciągnionemi.

Tak iednę, iak i drugą połowę tego łuku, podzielmy na dwie części rowne i przez punkta podziału, poprowadźmy znowu dwie ſtyczne aż do ich zeyścia ſię z promieniami przeciągnionemi przez końce tych połow.

Część promienia przeciągnionego, zawarta między okręgiem, i pierwſzą ſtyczną, więcey niż dwa razy więkſza ieſt od części zawartey między okręgiem, i iedną z drugich dwòch ſtycznych.

Tab. VI. Fig. 1. Niech będzie ADB, łuk koła, przez ktòrego punkt średni D, poprowadzona ieſt ſtyczna

na ſpotykaiąca w punktach E, i e; promienie CB, CA przedłużone. Przez średnie punkta. F, i f, łukow: BD, AD, poprowadźmy ſtyczne: GH, Gh, ktòre ſpotykaią w punktach: G, H, h, promienie przechodzące przez końce łukòw: BD, AD.

Trzeba dowieść, iż liniia BE, więcey niż dwa razy ieſt większa od linii BH.

Niech liniia CF, ſpotyka w pukcie L, liniią Ee; Tròykąty: CDL, CFG, mogą przyſtać do ſiebie, więc liniie: DG, albo BH, i FL, ſą ròwne.

Poprowadźmy cięciwę BD, ktòrą liniia CL ſpotyka w punkcie I, i BM ròwnoodległą od CL.

Tròykąty proſtokątne: BDM, JDL, ſą do ſiebie podobne; a że BD dwa razy ieſt większa od DI, więc też i BM, dwa razy większa będzie od JL; a zatym BM, więcey niż dwa razy większa ieſt od FL, albo BH. Ze zaś w Tròykącie EBM, kąt M, ieſt roztwarty, a przeto liniia BE, większa od linii BM; więc tym bardziey liniia BE, więcey niż dwa razy większa ieſt od linii BH.

142.

142. *Wniosek* 1. Niech będzie promień CN, prostopadły do promienia CA. Od punktów: E,H,B, spuśćmy prostopadłe: EO, HP, BQ do promienia CN; stosunek liniy: EB, HB, równy będzie stosunkowi liniy OQ, PQ. Aże EB więcey niż dwa razy iest większa od BH, więc i OQ więcey niż dwa razy większa też będzie od PQ.

143. *Wniosek* 2. Gdy daley dzielić będziemy łuk AB, na części równe; 4,8,16, 32, i t. d. i przez punkta średnie podziałow, pociągniemy styczne, aż do ich zeyścia się z promieniami przechodzącemi przez końce każdego w szczegulności podziału; gdy nadto, od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień przedłużony CE, spuściemy prostopadłą EO, na promień CN; rożnica między odległością spodku O, tey prostopadłey, od środka C, i odległością od tegoż środka C, spodku Q, prostopadłey BQ, z końca B, łuku AB spuszczoney, ta może wię różnica zmnieysza się więcey niż połową za każdym następuiącym podziałem, a zatym może się na ostatek stać mnieyszą od iakieykolwiek ilości naznaczoney.

144, *Twierdz:*

144. *Twierdz.* 1. Niech będzie łuk koła, mnieyſzy od czwartey części okręgu iego, i niech ten łuk obraca ſię około promienia proſtopadłego do drugiego promienia, który przechodzi przez ieden koniec tego łuku. Z drugiego iego końca ſpuśćmy proſtopadłą na pierwſzy promień, to ieſt na oś obrotu łuku.

Część powierzchni kuli utworzona, tym około oſi obrotem łuku, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu za podſtawę liniią równą całemu okręgowi, którego ten łuk ieſt częścią; a za wyſokość, liniią równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś obrotu: powierzchnia zaś cała kuli cztery razy ieſt większa, niżeli powierzchnia wielkiego koła, teyże kuli.

Niech będzie łuk ADB; niech promień CN, będzie proſtopadłym do promienia CA, przechodzącego przez ieden koniec tego łuku. *Tab. VI Fig.* 1.

Poprowadźmy BQ, proſtopadłą do CN. Niech koła czwarta część ABN, obraca ſię około promienia CN, iak około oſi ſwoiey. Powierzchnia krzywa, obrotem łuku AB naznaczona, równa ſię Proſto-

kątowi

kątowi, któryby miał za wysokość, liniią CQ, a za podstawę, liniią równą okręgowi, którego CA iest promieniem.

Dowodz: Niech styczna Ee, przechodzi przez średni punkt D. łuku AB, i niech spotyka w punktach E, i *e*, promienie przechodzące przez dwa końce tego łuku.

Dzielmy daley łuk AB, na części równe: 4,8,16.32, i t. d. a od punktu, w którym ostatnia styczna spotyka promień CB, przy każdym następuiącym podziale, spuszczaymy prostopadłą na promień CN. Rożnica między odległością środka. od spodku tey prostopadłey, a liniią CQ, zmnieyszać się będzie więcey niż połową. za każdym następnym podziałem; więc różnica ta, może się naostatek stać mnieyszą, niż iakakolwiek ilość naznaczona.

Podczas obrotu łuku AB, około linii CN, każda styczna kreśli powierzchnią krzywą Ostrokręgu ściętego równaiącą się Prostokątowi maiącemu za podstawę, liniią równą okręgowi, którego promieniem, iest CN, a za wysokość. odległość dwóch prostopadłych spuszczonych

nych na oś, od końcow tey ſtyczney; a zatym ſumma powierzchni krzywych, zrobionych od wſzyſtkich tych ſtycznych, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu tę ſamę podſtawę a wyſokość równą ſummie wſzyſtkich tych wyſokości; to ieſt równą odległości środka, od ſpodku proſtopadłey ſpuſzczoney na oś z punktu tego, gdzie oſtatnia ſtyczna ſpotyka promień CB. Może tedy rożnica ſummy powierzchni krzywych Oſtrokręgu zrobionych obrotem wſzyſtkich ſtycznych, mnieyſza być od Proſtokąta z taką, iak ſię wyżey powiedziało podſtawą a z wyſokością CQ, niżeli iakakolwiek ilość naznaczona. Summa zaś tych wſzyſtkich powierzchni krzywych, większa ieſt zawſze od powierzchni utworzoney obrotem łuku AB; więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania, i w Rozdziale o kwadrowaniu koła) powierzchnia krzywa utworzona obrotem łuku AB, równa ſię Proſtokątowi, maiącemu za podſtawę, okrąg, ktòrego promieniem ieſt CA, a za wyſokość, odległość CQ, środka C, od ſpodku Q, proſtopadłey ſpuſczoney na oś z końca B, tego łuku.

Mowiąc w ſzczegulności; powierzchnia Połkuli (Hemispherium) utworzoney obro-

brotem czwartey części koła, ABN, rò-wna ſię Proſtokątowi maiącemu za pod-ſtawę okrąg, ktòrego, CA ieſt promie-niem, a za wyſokość, promień CN.

A zatym powierzchnia krzywa, utwo-rzona obrotem łuku BN, ròwna ſię Pro-ſtokątowi maiącemu wyſokość NQ, a podſtawę ròwną okręgowi wielkiego koła kuli.

Powierzchnia także całey kuli, ró-wna ſię Proſtokątowi maiącemu za wy-ſokość średnicę kuli, a za podſtawę, o-krąg wielkiego iey koła, Aże powierz-chnia wielkiego koła równa ſię Proſto-kątowi maiącemu za wyſokość połowę promienia, albo czwartą część średnicy, a okrąg tego koła, za podſtawę.

Więc powierzchnia kuli cztery razy ieſt więkſza od powierzchni wielkiego iey koła, ktòrego promień ròwna ſię średnicy kuli.

145. Jdzie zatym, że powierzchnia ku-li, tak ſię ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak powierzchnia koła ia-kiegokolwiek, cztery razy wzięta, do kwadratu średnicy tegoż koła: Aże po-

wierz-

wierzchnia koła, ieſt do powierzchni kwadratu średnicy iego, iak okrąg koła do iey średnicy cztery razy wziętey iako ſię w Rozdziale XIII. Części I. dowiodło) więc powierzchnia kuli tak ſię ma do powierzchni kwadratu iey średnicy, iak cztery razy okrąg koła, do średnicy iego cztery też razy wziętey, to ieſt iak okrąg koła, do ſwoiey średnicy. Więc wyznaczenie dokładne powierzchni kuli, zawiſło od ſkwadrowania koła, i od wyproſtowania okręgu iego.

146. Powierzchnia cała kuli, tak ſię ma do powierzchni nakreśloney obrotem łuku NB, iak ſię ma średnica kuli, do linii NQ, albo iak kwadrat tey średnicy, do Proſtokąta z linii NQ, i z średnicy; albo nakoniec, iak kwadrat średnicy, do kwadratu linii NB; a zatym, iak koło, któreby miało za promień tę średnicę, do koła, któreby miało za promień liniią NB; a że powierzchnia kuli równa ſię powierzchni pierwſzego koła; więc powierzchnia nakreślona obrotem łuku NB, równa ſię powierzchni drugiego koła.

Niech będzie NBFA, połkole tworzące *Tab. VI. Fig. 2.* obrotem ſwoim kulę; niech będzie; NEDA Pro-

Proſtokąt, ktòrego podſtawą ieſt średnica tego połkola, a wyſokością promień iego. Podczas obrotu połkola, ten Proſtokąt utworzy Walec proſty, ktòrego powierzchnia krzywa zrobiona przez obrot linii ED, ròwnać ſię będzie Proſtokątowi maiącemu za wyſokość średnicę DE, albo AN, a za podſtawę okrąg podſtawy tego Walca, a zatym ta powierzchnia krzywa, ròwna ſię powierzchni kuli.

147. Podobnie ſię okaże, iż poprowadziwſzy liniią QBP, proſtopadłą do oſi, powierzchnia krzywa należąca do Walca, a zrobiona przez obrot linii EP, rowna ieſt powierzchni należącey do kuli, a zrobioney przez obrot łuku NB.

148. Walec utworzony obrotem Proſtokąta ADEN, miałby wyſokość równą średnicy podſtawy ſwoiey; dotykałyby ſię w punktach: A, i N, kuſi utworzoney obrotem połkola AFBN; dotykałby ſię iey także w okręgu, ktòrego promieniem byłby promień CF kuli.

O takim Walcu mòwi ſię, iż ieſt na kuli opiſanym. Nazywa ſię on także i Walcem Archimedeſa, od nazwiſka tego Matematyka, który pierwſzy znalazł ró-

wność

wność powierzchni kuli z powierzchnią krzywą tego Walca, iako też i stosunek ich bryłowatości.

149. Powierzchnia iedney z dwóch podstaw tego Walca, równa się Prostokątowi z okręgu tey podstawy, i z połowy iey promienia; a zatym powierzchnia obydwòch razem tych podstaw, równa się Prostokątowi z okręgu iedney podstawy, i z iey promienia. Aże powierzchnia krzywa Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu podstawy iego, i z średnicy teyże podstawy, albo z promienia dwa razy wziętego; więc powierzchnia cała Walca, równa iest Prostokątowi z okręgu iego podstawy, i z promienia trzy razy wziętego; a zatym powierzchnia krzywa tego Walca iest $\frac{2}{3}$ powierzchni iego całey; a przeto i powierzchnia kuli iest też $\frac{2}{3}$ powierzchni całey Walca na niey opisanego.

150. *Uwaga.* To, co się dotąd powiedziało, trzeba przystosować do niektòrych przykładòw liczebnych podobnych następuiącemu.

Przykł: Jakaż iest wielkość powierzchni Ziemi w milach kwadratowych Niemieckich, rachuiąc na stopień, mil 15?

Niech będą dwa koła wielkie Ziemi, iedno proſtopadłe do drugiego. Podzielmy okrąg iednego z tych kół, nap: co dzieſięć, albo co pięć ſtopniów, i przez punkta podziału niech przechodzą płaſzczyzny równoodległe od koła drugiego. Trzeba znaleść wielkość powierzchni zawartych między dwoma naybliżſzemi od ſiebie podſtawami.

Wſzczegulności zaś, ieżeli uczniowie maią wiadomość początkową Geografii, mogą wyrachować dwie powierzchnie zawarte między kołami, z których iedno odległe ieſt od *Równika* (æquator), na 23° $\frac{1}{2}$, a drugie od *Biegónu* (polus) także na 23° $\frac{1}{2}$.

Tob. VI Fig. 2 Niech będzie CF promieniem iednego koła wielkiego; niech NBF. wyraża czwartą część drugiego koła do niego proſtopadłego; niech BQ,bq, będą przecięciami tego koła proſtopadłego i dwóch płaſzczyzn równoodległych od koła, pierwſzego.

Powierzchnia krzywa połkuli, tak ſię ma do powierzchni części zawartey między płaſzczyznami CF i BQ, iak ſię ma promień kuli, do linii CQ, która ieſt

wſtawą

wstawą łuku BF. Podobnie i powierzchnia krzywa połkuli, tak się ma do powierzchni części zawartey między płaszczyznami CF, i bq, iak wstawa cała, czyli promień do wstawy łuku bF, to iest do linii Cq. Można więc wyrachować te części powierzchni połkuli, a zatym i ich różnicę, to iest: część powierzchni zawartey między płaszczyznami BQ, i bq.

151. *Twierdz.* 2. Bryłowatość kuli równa się $\frac{2}{3}$ bryłowatości Walca na tey kuli opisanego.

Niech będzie ACBMA czwarta część koła, tworząca Połkulę obrotem swoim około promienia CB. Niech będzie CABD kwadrat opisany na tey czwartey części koła. Ten Kwadrat obracaiąc się około CB, utworzy Walec opisany na połkuli, który będzie połową Walca opisanego na całey kuli. Trzeba dowieść, iż Połkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC równa się $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem kwadratu ACBD. *Tab. VI. Fig. 3.*

Poprowadźmy przekątną CD; Tróykąt BCD utworzy Ostrokrąg, którego

 pod-

podſtawa wykreślona będzie promieniem BD, a za wyſokość tego Oſtrokręgu będzie BC; to ieſt będzie ten Oſtrokrąg równey z Walcem podſtawy, i wyſokości.

Od dwóch ktorychkolwiek punktów nap: P, i *p* Oſi CB wyciągnimy prostopadłe do niey linije: PQ, pq; te przetną okrąg w M, i *m*, a liniią CD w L, i *l*; nakreślmy nadto, linije: MN, *mn*, LO, *lo*, równoodległe od oſi. Kwadrat promienia CM, równa ſię ſummie kwadratow z PM, i CP; aże liniia PQ równa ieſt promieniowi, (tak iako BD, CA i CB ſą równe) i CP równa PL; więc kwadrat z PQ, równa ſię ſummie kwadratow z PM, i z PL.

Ze zaś Walce utworżone obrotem Proſtokątów Pq, PN, PO, maiących iednakie wyſokości, ſą do ſiebie, iak ich podſtawy, albo iak kwadraty promieniow tychże podſtaw; więc pierwſzy z tych Walcow będzie równy ſummie dwoch innych. Podobnym ſpoſobem okazać można, że Walec Pq równa ſię ſummie Walców utworzonych obrotem Proſtokątów P*m*, i P*l*.

Tako-

Takowe dowodzenie ma micyſce chociaż nie od punktów P, i p, ale od ktòrychkolwiek innych będą wywiedzione proſtopadłe do oſi CB; a zatym podzieliwſzy oś, na iakąkolwiek liczbę części równych, a od każdego punktu podziału wyciągnąwſzy proſtopadłe przecinaiące tak okrąg iako i liniią CD; Summa wſzyſtkich Walców ſkładaiących Walec ADB, ròwnać ſię będzie ſummie wſzyſtkich Walcow wpiſanych w Półkulę, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców opiſanych na Oſtrokręgu, albo ſummie wſzyſtkich Walców opiſanych na Półkuli, wraz z ſummą wſzyſtkich Walców w Oſtrokrąg wpiſanych. Aże ſumma wſzyſtkich Walcow wpiſanych lub opiſanych na Pòłkuli, może ſię mnieyſzą ilością różnić od teyże Pòłkuli, niż iakakolwiek ilość naznaczona; a wtedy i ſumma wſzyſtkich Walców wpiſanych, lub opiſanych Oſtrokręgowi, ròżnić ſię też od tego Oſtrokręgu będzie mnieyſzą ilością, niż ieſt ta ilość dana.

Więc (podług tego, co ſię powiedziało o ſpoſobie wyczerpania;) Walec utworzony obrotem kwadratu CABD, ròwna ſię ſummie z Pòłkuli utworzoney obrotem czwartey części koła, i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tróyką̨ta BCD.

Aże Ostrokrąg utworzony obrotem Tróykąta BC, iest $\frac{1}{3}$ Walca; więc Półkula utworzona obrotem czwartey części koła AMBC, iest $\frac{2}{3}$ Walca.

A zatym kula, ktòraby utworzyła się obrotem Półkola, byłaby też $\frac{2}{3}$ Walca opisanego na tey kuli, a utworzonego obrotem Prostokąta opisanego na Półkolu tworzącym kulę.

152. *Wniosek* 1. Stosunek bryłowatości kuli do bryłowatości Walca opisanego, ten sam iest co, i stosunek powierzchni kuli, do powierzchni całey Walca opisanego; (149).

153. *Wniosek* 2. Bryłowatość kuli, równa się bryłowatości Ostrokręgu, któryby miał za podstawę, koło równe powierzchni kuli, a za wysokość, promień teyże kuli. Jakoż ten Ostrokrąg maiąc podstawę cztery razy większą od podstawy Walca na kuli opisanego, byłby cztery razy większy od Ostrokręgu innego równey z nim wysokości, a maiącego podstawę równą z Walcem. Aże ten drugi Ostrokrąg, gdyby miał połowę tylko wysokości Walca, byłby połową Ostrokręgu maiącego równą z Walcem

wyso-

wyſokość i podſtawę, a zatym byłby połową tego Oſtrokręgu, który ieſt $\frac{1}{3}$ Walca; więc Oſtrokrąg maiący równą z Walcem podſtawę, a wyſokość równą promieniowi kuli, ieſt $\frac{1}{6}$ tego Walca; a zatym Oſtrokrąg maiący za wyſokość promień kuli, a podſtawę cztery razy większą od podſtawy Walca, byłby $\frac{4}{6}$ albo $\frac{2}{3}$ Walca. Że zaś i kula ieſt $\frac{2}{3}$ tegoż Walca, więc kula równa ſię temu Oſtrokręgowi.

Można to ſamo ieſzcze i w ten ſpoſób okazać:

Niech będzie iakikolwiek *Wielościan* (Polyedrum) którego wſzyſtkie ściany dotykaią ſię kuli: uważaiąc każdą z tych ścian iak podſtawę Oſtrogranu maiącego ſwoy wierzchołek w środku Wielościanu; bryłowatość tego Wielościanu, równać ſię będzie bryłowatości iednego takiego Oſtrogranu, któryby miał za wyſokość promień kuli, a za podſtawę ſummę podſtaw, Oſtrogranów, na które podzielony był ten Wielościan; to ieſt powierzchnią całą tego Wielościanu.

To podánie zawſze ieſt prawdziwe, iakażkolwiek będzie liczba ścian tego

Wielo-

Wieleścianu więc (podług tego, co się mowiło o sposobie wyczerpania,) możnaby łatwo dowieść, że też i do kuli wszczegulności przystosowane to podanie, iest prawdziwym, a zatym że kula, równa się Ostrokręgowi, któryby miał za wysokość, iey promień, a za podstawę, całą iey powierzchnią.

154. *Wniosek* 3. Wycinek kuli utworzoney obrotem wycinka kołowego BCM, równy iest Ostrokręgowi maiącemu za wysokość, promień tey kuli, a za podstawę, koło, równe powierzchni kulistey, utworzoney obrotem łuku BM; to iest koło, którego promieniem byłaby cięciwa BM; a zatym bryłowatość tego wycinka, tak się ma do bryłowatości kuli, iak powierzchnia tego wycinka, do powierzchni kuli; albo iak wysokość BP, do średnicy kuli.

155. *Wniosek* 4. Taż bryłowatość wycinka kuli, utworzonego obrotem wycinka koła BCM, iest $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD. Jakoż powierzchnia tego wycinka, tak się ma do powierzchni kuli, iak BP, do średnicy kuli albo iak Walec utworzony obrotem Prostokąta BPQD do Walca opisanego

go na kuli. Aże kula ieſt $\frac{2}{3}$ Walca na niey opiſanego, więc i wycinek kuli, utworzony obrotem wycinka koła BCM, ieſt też $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta BPQD.

156. *Wnioſek* 5. Podobnie, i część kuli utworzona obrotem wycinka ACM ieſt $\frac{2}{3}$ Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP. Aże część kuli (którą to część nazwać można *klocem kuliſtym* (Truncus ſphæricus) utworzony obrotem części kołowey ACPM, ieſt ſummą z wycinka kuliſtego utworzonego obrotem wycinka kołowego ACM. i z Oſtrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; więc bryłowatość tego kloca kuliſtego, równa ſię ſummie z $\frac{2}{3}$ Walca teyże z nim wyſokości, któryby miał za podſtawę, koło wielkie kuli, i z $\frac{1}{3}$ Walca iednakiey także wyſokości, a którego podſtawa byłaby ròwna drugiemu kołu kloc ten kończącemu; a zatym bryłowatość tego kloca tak ſię ma do bryłowatności Walca utworzonego obrotem Proſtokąta CAQP, iak $\frac{2}{3}CA^2 + \frac{1}{3}MP^2$ do CA^2.

157. *Wnioſek* 6. Aby znaleść odcinek kuli utworzoney obrotem odcinka kołowego BMP; uważaymy ſobie ten odcinek

nek kulisty, iak różnicę między Półkulą utworzoną obrotem czwartey części kołowey ABC, a klocem kulistym utworzonym przez obrot odcinka CAMP; albo też iak różnicę wycinka kulistego utworzonego obrotem wycinka BOM; od Ostrokręgu utworzonego obrotem Tròykąta CPM; albo nakoniec, iak różnicę Walca utworzonego obrotem Prostokąta BPQD, od Ostrokręgu ściętego, utworzonego obrotem Czworokąta BDLP.

ROZDZIAŁ X.

O Bryłach podobnych.

158. DWie Bryły samemi tylko płaszczystemi powierzchniami zakończone, i ktòrych wszystkie kąty bryłowe odpowiadaiące sobie mogą przystać do siebie, a ściany ich także odpowiadaiące są podobne; te mowię dwie Bryły nie ròżnią się chyba samą tylko wielkością, i iedna wzorem iest drugiey. Tak nap: dwa Sześciany, z ktòrych ieden ma bok długi na poł stopy, a drugi, na cal iedem, rożnią się samą tylko wielkością. Takie Bryły nazywaią się podobnemi.

Przy



Przykłady. Dwa Równoległościany proſtokątne ſą podobne, gdy ich podſtawy i ściany ſą podobne iedne względem drugich,

Dwa Graniaſtoſłupy proſte, ſą podobne, gdy podobne ſą ich podſtawy, i gdy wyſokość ich proporcyonalna iednemu z boków, tychże podſtaw.

Dwa Oſtrograny, maiące kąt bryławaty ſpolny w wierzchołku podobne będą, gdy podſtawy ich ſą równoodległe.

159. *Uwaga.* Gdy dwie figury proſtokreślne, ſą podobne; wziąwſzy punkt iakikolwiek w iedney z tych figur, i poprowadziwſzy od tego punktu liniie do wſzyſtkich wierzchołków tey figury; można będzie znaleść i w drugiey figurze punkt podobnie pierwſzemu położony; od którego ciągnąc liniie do każdego tey figury wierzchołka, podzielemy ią na Tróykąty podobne względem Tróykątów, na które podzielona była pierwſza figura. Podobnie też:

160. *Twierdz:* 1. Wziąwſzy w Bryle zakończoney powierzchniami płaſzczyſtemi, punkt iakikolwiek za wierzchołek tylu Oſtrogranów, ile ta Bryła ma ſcian, biorąc też ſciany za podſtawy; można znaleść i w drugiey Bryle podobney, punkt podobnie pierwſzemu położony, który wziąwſzy także za wierzchołek,

tyluż

tyluż co i w pierwſzey Bryle Oſtrogra, nów, wſzyſtkie te Oſtroſtrograny będą podobne względem Oſtrogranów pierwſzey Bryły.

Przykład. Weźmy środek Sześcianu za wierzchołek ſześciu Oſtrogranów, maiących za podſtawy, ściany tego Sześcianu; gdy w innym iakimkolwiek Sześkianie, weźmiemy także środek za wierzchołek ſzeſciu Oſtogranów maiących za podſtawy, ściany tego drugiego Sześcianu; te drugie Oſtrograny, będą podobne względem pierwſzych.

Tož mówić i o innych Bryłach foremnych.

Natym podaniu zaſadza ſię cała Nauka o Bryłach podobnych; należy więc nad wyłuſzczeniem iey nieco zabawić ſię.

Wybrawſzy iakikolwiek punkt w Bryle za wierzchołek Oſtrogranów maiących ściany tey Bryły, za podſtawy, i na te Oſtrograny, Bryłę podzieliwſzy, ſpuśćmy od tego punkru proſtopadłą do iedney z ścian tey Bryły; a na ścianie odpowiadaiącey w drugiey Bryle, weźmy punkt podobnie na tey ścianie położony, iaki ſpodek proſtopadłey ſpuſzczoney na ścianę pierwſzey

Bryły

Bryły; od tego punktu, na ścianie drugiey Bryły położonego, wyprowadźmy proftopadłą do tey ściany, tak wyfoką aby ftofunek iey do pierwfzey proftopadłey rownał fię ftofunkowi dwòch krawędzi, odpowiadaiących fobie w obydwòch Bryłach. Wierzch tey drugiey proftopadłey weźmy za wierzhołek wfzyftkich Oftrogranòw, na ktòre, tę drugą Bryłę dzielić mamy. Oftrograny tey drugiey bryły, będą podobne względem Oftrogranòw, na ktòre podzielona pierwfza Bryła.

Dowodz: Odległości dwòch punktów ftużących za wierzchołki Oftrogranów, od wierzchołków odpowiadaiących fobie w ścianach, do których proftopadłe fą ciągnione, te mowię odległości, fą przeciwproftkątnemi Tróykątów proftokątnych podobnych, maiących za boki te proftopadłe, i odległości ich fpodków od wierzchołków kątów ścian tychże. Więc wfzyftkie ściany tych dwóch Oftrogranów, odpowiadaiące fobie boki, maią proporcyonalne, to ieft maią ie w ftofunku dwòch krawędzi odpowadaiących fobie w dwóch Bryłach; a zatym wfzyftkie te ściany, fą podobne, i wfzyftkie ich kąty fą ròwne iedne względem drugich, a przeto i kąty bryłowe które fię z nich fkładaią, mogą przyftać do fiebie; fą więc te

dwa

dwa Ostrograny podobne. Pochyłości też ścian Ostrogranów do płaszczyzn podstaw są równe iedne względem drugich; aże także równe są pochyłości, tych podstaw do płaszczyzn ścian tych odpowiadaiących sobie w Bryłach, które ściany spolną krawędź maią z podstawami tych Ostrogranów, więc i ściany odpowiadaiące sobie w tych dwoch Ostrogranach, będą podobnie nachylone do ścian tych odpowiadaiących sobie w dwoch Bryłach, a które maią spolną krawędź z pierwszemi dwiema ścianami; to iest z podstawami dwóch tych Ostrogranów.

Na ścianach dwóch, odpowiadaiących sobie w tych dwóch pierwszych Ostrogranach, spuśćmy od ich wierzchołków prostopadłe do podstaw tychże dwóch ścian; a od spodków tych prostopadłych poprowadźmy na ścianach odpowiadaiących sobie w dwóch Bryłach, inne dwie prostopadłe do tychże dwóch podstaw, ścian Ostrogranów. Oprócz tego, na płaszczyznie przechodzącey przez dwie w obydwòch bryłach ciągnione prostopadłe, spuśćmy do drugich dwóch prostopadłych, na płaszczyznach ścian odpowiadaiących sobie, w Bryłach, od tychże co i pierwsze wierzchołków, trzecie dwie prostopadłe; te ostatnie prostopadłe, będą prostopadłemi do płaszczyzn

dwoch

dwòch tych ścian odpowiadaiących ſobie, na których ciągnione były dwie drugie proſtopadłe; Tròykąty zawarte trzema temi proſtopadłemi, tak w iedney, iak i w drugiey Bryle, będą ròwnokątne, a zatym i podobne. Aże pierwſze dwie proſtopadłe ciągnione na płaſczyznach ścian, dwòch pierwſzych Oſtrogranòw, maią ſię do ſiebie, iak krawędzie odpowiadaiące ſobie w dwòch Bryłach; więc też i odległości wierzchołkòw, tych dwòch Oſtrogranòw od drugich dwóch ścian także ſobie odpowiadaiących, w tych Bryłach, będą w tymże ſamym ſtoſunku; i odległości ſpodkòw ich, od dwóch krawędzi należących do tych ścian, a odpowiadaiących ſobie, w tymże też ſtoſunku będą.

Spodki proſtopadłych ſpuſzczonych na dwie ściany odpowiadaiące ſobie w pierwſzych dwòch Oſtrogranach, były podobnie położone na dwòch Brył krawędziach odpowiadaiących ſobie, a zatym odległości tych ſpodkòw od końców odpowiadaiących ſobie, tych krawędzi, ſą do ſiebie w tymże ſamym ſtoſunku; a zatym odległości ſpodkòw liniy proſtopadłych ſpuſzczonych do płaſzczyzn drugich dwòch ścian Brył, od końcòw tychże dwòch krawędzi, będą w tym ſamym ſtoſunku. Więc na tych dwòch ścianach, ſpodki proſtopadłych podobnie

ſą

ſą położone. Ze zaś i wielkości tych proſtopadłych ſą proporcyonalne krawędziom tych dwóch Brył; więc wierzchołki pierwſzych dwóch Oſtrogranów, ſą też podobnie położone względem dwòch ścian drugich, odpowiadaiących ſobie w Bryłach; a zatym i drugie dwa Oſtrograny maiące ſpolny wierzchołek, a te dwie ściany Brył za podſtawy, będą do ſiebie podobne.

Tož mówić i o innych Oſtrogranach odpowiadaiących ſobie, z których ſię te dwie Bryły ſkładaią. (i)

161. *Twierd:* 2. Powierzchnie Brył podobnych, zakończonych ſamemi tylko płaſzczyſtemi powierzchniami, maią ſię

(i) *To Twierdzenie, ieſt bardziey długie niż trudne, i łatwo poiąć ie można, maiąc Figurę przed oczema z drewna, lub z papieru zrobioną. Jużby też nawet po tak wielu Geometrycznych ćwiczeniach powinni wprawieni bydź Uczniowie, aby w myśli ſamey umieli ſobie wyſtawić Figurę pomagaiącą do zrozumienia Twierdzenia podanego. a zdatnieyſzą do obiaśnienia iego, niżby była Figura odryſowaua w perſpektywie, i przed oczy im ſtawiona.*

ſię do ſiebie, iak kwadraty boków ich odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku dwumnożnym tychże boków.

Dowodz: Wſzyſtkie ściany dwòch Brył podobnych, po dwie brane ſą ſobie podobne; i tak brane, w iednakowym do ſiebie ſą ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku dwumnożnym, dwòch krawędzi odpowiadaiących ſobie; więc i ſumma wſzyſtkich ścian kończących iednę Bryłę, będzie do ſummy wſzyſtkich ścian kończących drugą Bryłę, w tymże ſamym ſtoſunku.

162. *Twierdz:* 3. Bryłowatości dwòch Brył podobnych, ſą do ſiebie w ſtoſunku ſześciennym dwóch ich krawędzi odpowiadaiących ſobie, czyli, ſą w ſtoſunku tròymnożnym tychże dwóch krawędzi.

1. Widzieliśmy iuż, że ſtoſunek iednego Sześcianu do drugiego, ten ſam ieſt, co i ſtoſunek boku pierwſzego Sześcianu, do czwartey linii ciągło proporcyonalney; która ſię znayduie, ſzukaiąc nayprzod trzeciey ciągło proporcyonalney, do boku Sześcianu pierwſzego, i do boku Sześcianu drugiego; a potym do tychże dwòch bokòw, i do trzeciey pro-

por-

porcyonalney znalezioney, ſzukaiąc czwartey.

Gdyby tedy bok drugiego Sześcianu był dwa razy nap: większy od boku Sześcianu pierwſzego, ta czwarta ciągło proporcyonalna, byłaby ośm razy większa od boku Sześcianu pierwſzego, a zatym i Sześcian drugi byłby ośm razy większy od Sześcianu pierwſzego.

2. Niech będą dwa Równoległościany proſtokątne podobne.

Gdy krawędź iedna, iednego z tych Równoległościanów, ieſt nap: dwa razy większa, od krawędzi iedney drugiego Równoległościanu; wſzyſtkie też inne krawędzie pierwſzego Równoległościanu, będą dwa razy większe od krawędzi drugiego. Powierzchnia więc podſtawy pierwſzego Równoległościanu, będzie cztery razy większa, niż powierzchnia podſtawy drugiego. Aże też i wyſokość pierwſzego, dwa razy ieſt większa od wyſokości drugiego; więc bryłowatość pierwſzego ieſt ośm razy większa od bryłowatości drugiego. To rozumowanie przyſtoſować można do wſzyſtkich innych liczebnych przykładów podobnych przytoczonemu.

W ogul-

W ogulności zaś mowiąc: niech będą trzy krawędzie: A,B,C, iednego Równoległościanu proftokątnego; a zaś: *a*,*b*,*c*, krawędzie drugiego Równoległościanu, pierwfzemu podobnego; będą te trzy ftofunki równe; A : a = C : b = C : c. Liniiom A,i *a*, znaydźmy dwie liniieL,i M, ciągło proporcyonalne; tak aby było A: a = a : L = L : M,

Będzie pierwfzy Ròwnoległościan do drugiego, iak A do M.

Jakoż uważaiąc liniie A i *a*, B, i *b*, iak boki podftaw, tych dwóch Równoległościanów, zamieńmy Proftokąt z linii a, i b, na inny, którtyby miał za bok ieden, liniią B, a za bok drugi, tę liniią, która wypadnie z proporcyi B : b = a : *x*. Ze zaś ftofunek linii B do b, wzięty ieft za równy ftofunkowi linii A do *a*, więc też będzie A : a = a : x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey fzukamy, będzie w famey rzeczy trzecią proporcyonalną do A, i *a*. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną ; L. Będzie podftawa drugiego Równoległościanu, równa Proftokątowi z B przez L; i ten drugi Równoległościan, będzie równy Ròwnoległościanowi, którtyby miał trzy linie B, *c*, L, za krawędzie ; a zatym ftofunek iego do

P pier-

pierwszego Równoległościanu, będzie ten sam, co i stosunek Prostokąta z liniy c, i L, do Prostokąta z liniy A, i C.

Zamieńmy Prostokąt z liniy c i L, na inny, któryby miał za bok ieden liniią C, a za bok drugi liniią, która wypadnie z proporcyi C : c = L : x. Ze zaś stosunek linii C do c. wzięty iest za równy stosunkowi A do a, a stosunek A do a, zrobiliśmy równy stosunkowi a, do L, więc też będzie a : L = L : = x; a zatym ta czwarta proporcyonalna, którey szukamy będzie w samey rzeczy trzecią proporcyonalną do a, i L. Nazwiymy tę trzecią proporcyonalną : M; Prostokąty : C × M i c × L. będą równe, Ażeśię dowiodło iż pierwszy Równoległościan iest do drugiego w stosunku Prostokąta A × C do Prostokąta c × L; więc też ten pierwszy Rownoległościan będzie do drugiego w stosunku Prostokąta A × C do Prostokąta C × M, to iest w stosunku A do M.

Ze zaś iest A : a = a : L = L : M; więc stosunek pierwszego Równoległościanu do drugiego, równa się stosunkowi linii pierwszey do czwartey, ciągło proporcyonalney; która to pierwsza liniia

służą-

służąca za pierwszy wyraz proporcyi, powinna być krawędzie iednego z tych Równoległościanów, drugim zaś teyże proporcyi wyrazem. ma być krawędź drugiego Równoległościanu, pierwszemu odpowiadaiący; tak iak iest nap: krawędź A, i *a*.

Ale że też i dwa Sześciany maiące krawędzie A, i *a*, w tymże samym byłyby stosunku, więc dwa Równoległościany podobne, maią się do siebie w stosunku sześciennym ich krawędzi.

163. *Twierdz: przybrane.* Wysokości Graniastosłupów podobnych, lub Ostrogranów podobnych, tak się maią do siebie, iak ich krawędzie odpowiadaiące sobie.

Dowodz: Dwóch ścian odpowiadaiących sobie w dwóch Graniastosłupach podobnych, pochyłości do podstaw są równe; tychże ścian wysokości, tak się maią do siebie, iak boki, służące im za podstawy. Wysokości tych Graniastosłupów, równe są prostopadłym spuszczonym na ich podstawy od punktów którychkolwiek na podstawach przeciwnych, nap: od punktów na bokach odpowiadaiących sobie w tychże pod-

ſtawach; a zatym te wyſokości Grania-
ſtoſłupów, będą ſłużyć za iedno ramie
kąta proſtego, w dwóch Tróykątach po-
dobnych, które za przeciwproſtokątne,
maią wyſokości dwóch ścian odpowia-
daiących ſobie. Będą zatym te wyſo-
kości dwóch Graniaſtoſłupów, tak ſię
mieć do ſiebie, iak wyſokości dwóch ich
ścian odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak
krawędzie dwóch tychże Graniaſtoſłu-
pów, odpowiadaiące ſobie. To ſamo ro-
zumowanie przyſtoſować można i do
Oſtrogranów.

3. Niech będą dwa iakiekolwiek Gra-
niaſtoſłupy podobne, i te także ſą do ſie-
bie w ſtoſunku ſześciennym, ich krawę-
dzi odpowiadaiących ſobie.

Rozumowanie Arytmetyczne, ktòreby
mogło ſłużyć za wſtęp do ogulnego do-
wodzenia, to ſamo ieſt, co i poprzedza-
dzaiące.

Wyſtawuiąc ſobie podſtawy tych
dwóch Graniaſtoſłupów, zamienione na
dwa kwadraty równe im co do powierzch-
ni; ponieważ powierzchnie tych dwóch
podſtaw, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty
bokòw ich, odpowiadaiących ſobie; więc
też

też i powierzchnie kwadratów równych tym podstawom; mieć się do siebie będą, iak kwadraty boków odpowiadaiących sobie, w tychże podstawach; a zatym i stosunek boków, tych dwóch kwadratów, równy będzie stosunkowi boków odpowiadaiących sobie w podstawach, dwóch Graniastosłupów. Aże ten ostatni stosunek, równa się stosunkowi wysokości dwóch Graniastosłupów; więc Rownoległościany maiące za podstawy kwadraty, równe podstawom Graniastosłupów, i wysokości równe wysokościom Graniastosłupów, byłyby do siebie podobne; a zatym te dwa Równoległościany, takby się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi, albo iak Sześciany krawędzi odpowiadaiących sobie w Graniastosłupach. Że zaś te Równoległościany, byłyby równe względem Graniastosłupów, więc też i dwa Graniastosłupy podobne, maią się do siebie, iak Sześciany krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

4. Niech będą dwa iakiekolwiek Ostrograny podobne, stosunek ich równa się stosunkowi Sześcianów krawędzi ich, odpowiadaiących sobie.

Dwa

Dwa Graniastosłupy nap: proste, których podstawy i wysokości byłyby równe względem podstawy i wysokości, tych Ostrogranów; te mówię Graniastosłupy miałyby wysokości proporcyonalne bokom podstaw swoich; byłyby więc podobne; a zatym tak by się do siebie miały, iak Sześciany ich krawędzi. Aże byłyby trzy razy większe względem tych dwóch Ostrogranów, więc i te Ostrograny są do siebie w stosunku Sześciennym ich krawędzi.

5. Wszystkie Bryły podobne, zakończone powierzchniami płaskiemi, maią się do siebie iak Sześciany, ich krawędzi.

Dwie Bryły podobne, można rozłożyć na takie Ostrograny, z których każdy w szczególności należący do iedney Bryły, podobny będzie drugiemu należącemu do drugiey Bryły. Te Ostrograny iedne względem drugich poiedynczo brane, mieć się do siebie będą w stosunku sześciennym ich krawędzi, odpowiadaiących sobie; więc i summa wszystkich Ostrogranów, z których się składa iedna Bryła, będzie do summy wszystkich Ostrogranów, z których się składa druga

ga Bryła, w tymże ſamym ſtoſunku, to ieſt w ſtoſunku ſześciennym, ich krawędzi, odpowiadaiących ſobie.

164. *Defin:* Walce proſte podobne do ſiebie ſą te, których ſtoſunek wyſokości, równa ſię ſtoſunkowi promieni, ich podſtaw; przecięcia zatym tych Walców przez oſi przechodzące, ſą podobne, a ztąd podobne ſą i Proſtokąty tworzące obrotem ſwoim te Walce.

Co zaś do Walców pochyłych, a do ſiebie podobnych; oprocz tego, że wyſokości ich mieć ſię powinny do ſiebie, iak promienie ich podſtaw, przecięcia też ich od płaſzczyzny przechodzącey przez ich oſi proſtopadłe do podſtawy, powinny być do ſiebie podobne, to ieſt ich oſi powinny ſię mieć do ſiebie, iak promienie ich podſtaw:

165. *Twierdz.* 4. Powierzchnie Walców proſtych podobnych, maią ſię do ſiebie, iak kwadraty ich *Wymiarów* (Dimenſio) odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak kwadraty promieni, ich podſtaw, albo iak kwadraty ich wyſokości.

Powierzchnia każdego z tych Walców równa ſię Proſtokątowi z okręgu podſtawy

wy iego, i z summy wysokości iego, i promienia podstawy; więc powierzchnie te, tak się mieć do siebie będą, iak Prostokąty z promieni ich podstaw, i z summy tychże promieni i wysokości Walców. Aże Promienie podstaw, są do siebie (dla podobieństwa Walców) iak ich wysokości, więc i summa z tych promieni iest do summy z tych wysokości, w tym stosunku, w którym są te promienie. Prostokąty więc, w których stosunku maią się do siebie powierzchnie te Walców, są podobne, a przeto tak się będą do siebie miały, iak kwadraty ich boków, odpowiadaiących sobie, nap: iak kwadraty promieni ich podstaw. Będą więc do siebie i powierzchnie Walców w tymże samym stosunku; to iest, iak kwadraty promieni, ich podstaw.

Toż mówić i o powierzchniach krzywych w Walcach; to iest, o takich, w których się nie zamykaią podstawy.

166. *Twierdz:* 5. Bryłowatości Walców podobnych, tak się maią do siebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących sobie; to iest, są do siebie w stosunku tróymnożnym tychże wymiarów, nap: w stosunku troymnożnym promieni, ich podstaw.

Dowodz:

Dowodz: Opiſzmy na podſtawach, tych Walców, iakiekolwiek Wielokąty foremne, podobne; niech te Wielokąty będą podſtawami Graniaſtosłupów, teyże z Walcami wyſokości. Te Graniaſtosłupy będą podobne, a zatym będą ſię miały do ſiebie w ſtoſunku tròymnożnym, nap: promieni ich podſtaw.

Walce tak ſię do ſiebie maią, iak Graniaſtosłupy na nich opiſane. Jakoż każdy Walec ieſt do Graniaſtosłupa na nim opiſanego, w ſtoſunku podſtawy tego Walca do podſtawy Graniaſtosłupa. Ażeby podobne ſą dwa Wielokąty na podſtawach Walców opiſane, więc tenże ſam ſtoſunek będzie każdego Walca do Graniaſtosłupa na nim opiſanego; a zatym tak ſię mieć będzie ieden Walec, do Graniaſtosłupa na nim opiſanego, iak i Walec drugi do Graniaſtosłupa na nim także opiſanego, tak więc pierwſzy Walec będzie ſię miał do drugiego, iak i pierwſzy Graniaſtosłup do drugiego.

Aże ſtoſunek tych Graniaſtosłupów równa ſię ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni podſtaw Walców, na których ſą te Graniaſtosłupy opiſane; więc i ſtoſunek

ſunek tych Walców równać ſię także będzie ſtoſunkowi tróymnożnemu promieni tychże podſtaw.

167. Można obiaśnić przykładami liczebnemi to Twierdzenie; ma zaś być nayprzod przyſtoſowane do ſamych Walców proſtych, zkąd łatwo wnieść będzie można, że i w ukośnych Walcach, ten ſam ſtoſunek ma mieyſce; ponieważ Walce ukośne, równey podſtawy i wyſokości z Walcami proſtemi, byłyby im równe, a zatym byłyby też do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni podſtaw ſwoich.

168. *Defin.* Oſtrokręgi proſte nazywaią ſię *podobnemi*, gdy tak ſię maią do ſiebie ich wyſokości, iak i promienie ich podſtaw. Przecięcia przechodzące przez oś tych Oſtrokręgów ſą podobne, a zatym podobne ſą Tróykąty, tworzące obrotem ſwoim te Oſtrokręgi.

Co zaś do Oſtrokręgów ukośnych: tych nie tylko wyſokości tak ſię mieć do ſiebie powinny, iak promienie ich podſtaw, ale nadto i oſi ich w tymże ſamym do ſiebie ſą ſtoſunku.

169

169. *Twierdz:* 6. Powierzchnie całe Ostrokręgów równych, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni podstaw, albo w stosunku dwumnożnym boków tychże Ostrokręgów.

Dowodzenie tego, może być podobne do dowodzenia Twierdzenia 4. względem stosunku powierzchni Walców podobnych.

Może też być i w sposob następujący, który także służyćby mogł równie i do Walców:

W iednym którymkolwiek Ostrokręgu, powierzchnia krzywa, tak się ma do powierzchni podstawy, iak bok Ostrokręgu, do promienia tey podstawy. Aże i w drugim Ostrokręgu podobnym, pierwszemu tenże sam stosunek mamieysce; więc powierzchnia krzywa iednego Ostrokręgu, tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak powierzchnia krzywa drugiego Ostrokręgu podobnego, do powierzchni iego podstawy: więc i summa z powierzchni krzywey i z powierzchni podstawy iednego Ostrokręgu, to iest cała iego powierzchnia tak się ma do powierzchni podstawy iego, iak cała powierzchnia drugiego Ostrokręgu, do powierzchni

iego

iego podſtawy; a zatym cała powierzchnia pierwſzego Oſtrokręgu, tak ſię ma do całey powierzchni drugiego, iak powierzchnia podſtawy pierwſzego Oſtrokręgu, do powierzchni drugiego; albo iak kwadrat promienia pierwſzey podſtawy, do kwadratu promienia drugiey.

Podobnie dowieść można, że i powierzchnie krzywe Oſtrokręgów podobnych, ſą w ſtoſunku dwumnożnym promieni podſtaw, tych Oſtrogręgów lub ich boków odpowiadaiących ſobie.

170. *Twierdz*, 7. Bryłowatości Oſtrokręgów podobnych, maią ſię do ſiebie, iak Sześciany ich wymiarów odpowiadaiących ſobie; to ieſt: iak Sześciany promieni ich podſtaw, albo iak Sześciany ich boków, i t. d.

Twierdzenie to podobnie ſię dowodzi, iak i poprzedzaiące, względem bryłowatości Walców; kładąc zamiaſt Graniaſtoſłupów na Walcach opiſanych, Oſtrograny opiſane na Oſtrokręgach.

171. *Uwaga.* Wſzyſtko to, cokolwiek ſię powiedziało o ſtoſunku bryłowatości

Równo-

Ròwnoległościanów, Graniaſtosłupow, Oſtrogranów, i Oſtrokręgòw podobnych, na to wypada, że:

W ogulności mówiąc, te Bryły ſą w ſtoſunku złożonym z ſtoſunku ich podſtaw, i z ſtoſunku ich wyſokości.

Ze zaś, gdy te Bryły ſą podobne, ſtoſunek ich podſtaw, ieſt dwumnożnym ſtoſunku ich wyſokości, więc ſtoſunek złożony z ſtoſunku ich podſtaw, i z ſtoſunku ich wyſokości, ſkłada ſię z ſtoſunku dwumnożnego, i z ſtoſunku poiedyńczego ich wyſokości; będzie tedy taki ſtoſunek tróymnożnym ſtoſunku ich wyſokości. A że ſtoſunek ich wyſokości rúwną ſię ſtoſunkowi ich boków którychkolwiek odpowiadaiących ſobie, więc ſtoſunek tych Brył, gdy do ſiebie ſą podobne, ieſt też ſtoſunkiem tróymnożnym boków ich którychkolwiek odpowiadaiących ſobie.

172. *Twierdz.* 8. Powierzchnie kul, ſą do ſiebie w ſtoſunku dwumnożnym ich promieni, to ieſt: iak kwadraty ich promieni. Bryłowatości zaś kul, ſą do ſiebie w ſtoſunku tròymnożnym ich promieni, to ieſt, iak Sześciany tychże promieni.

Dowodz.

Dowodz. Powierzchnie kul, ſą cztery razy większe, niżeli powierzchnie ich kół wielkich; a zatym, tak ſię do ſiebie maią, iak powierzchnie tychże kół, to ieſt: iak kwadraty ich promieni.

Bryłowatości kul, ſą $\frac{2}{3}$ względem Walców na nich opiſanych; więc tak ſię maią do ſiebie, iak bryłowatości tych Walców, to ieſt iak Sześciany ich promieni.

173. *Uwaga*. Widzieliśmy w ſzczególności, iż powierzchnia kuli, ieſt do powierzchni kwadratu iey średnicy, w ſtoſunku okręgu koła do iego średnicy, i ten ſtoſunek ieſt zawſze iednakowy. Widzieliśmy też, że bryłowatość kuli, ieſt do bryłowatości Sześcianu iey średnicy, iak okrąg koła do średnicy iego, 6 razy wziętey; który także ſtoſunek nigdy ſię nieodmienia.

Kule więc zachowuią własności Brył podobnych, tak w ſtoſunku ich powierzchni, iako i w ſtoſunku ich bryłowatości. Iakoż, ſą one w ſamey rzeczy Bryłami podobnemi; środek iedney kuli podobnie ieſt położony, iak i środek inney iakieykolwiek kuli; tak iedna iak i druga, tworzy ſię obrotem półkola, a te półkola ſą do ſiebie podobne.

Można-

Możnaby więc (z niewielką odmianą) to im przystosować, co się powiedziało o Bryłach podobnych, zakończonych powierzchniami płaskiemi, względem punktów podobnie położonych w tychże Bryłach.

174. *Defin:* Wycinki podobne kul, są te, których kąty w środku, są podobne, albo które obrotem podobnych wycinków kół tworzą się.

Odcinki kul, podobne, są te, których promienie podstaw, tak się do siebie maią, iak ich wysokości, albo iak promienie kul, do których należą; albo na koniec są te, które się tworzą podobnych poł odcinków kol obrotem.

175. *Twierdz:* 9. Powierzchnie kuliste, i powierzchnie całe, tak wycinków, iak i odcinków podobnych w kulach, są do siebie w stosunku dwumnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz: Niech będą: ACB. aeb, dwa wycinki, kół podobne, które obrotem swoim, około promieni: AC, ac, tworzą podobne kul wycinki. *Tab. VI Fig. 4.*

Nayprzod

Nayprzod Powierzchnie kuliſte utworzone przez łuki: AB: ab, równać ſię będą powierzchniom kół maiących za promienie, liniie: AB, ab; więc tak ſię mieć będą do ſiebie, iak kwadraty tych liniy: AB, ab, albo iak kwadraty promieni: AC, ac.

Powtore. Powierzchnie Oſtrokręgowe utworzone obrotem promieni: CB, bc, maią ſię też do ſiebie, iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca; Więc i powierzchnie całe wycinków podobnych tak ſię do ſiebie maią, iak kwadraty promieni CA, ca.

Koła wykreślone promieniami BD, bd, i ſłużące za podſtawy odcinkom kul, utworzonym przez obrot połodcinków kół; ABD, abd, ſą także do ſiebie, iak kwadraty liniy BD, bd, a zatym iak kwadraty promieni: CB, cb, albo CA, ca.

176. *Twierdz:* 1o. Bryłowatości tak wycinków, iak i odcinków podobnych, w kulach, ſą do ſiebie w ſtoſunku tróymnożnym promieni kul, do których należą.

Dowodz. Nayprzod: Wycinek kuli, utworzony przez wycinek ACB, koła

tak

tak się ma do swoiey kuli, iak kwadrat linii AB, do kwadratu średnicy AE, albo iak kwadrat linii ab, do kwadratu średnicy ae; to iest: iak wycinek kuli, utworzony przez wycinek: acb, koła, do kuli swoiey. Więc tenże sam iest stosunek iednego z tych wycinka do swoiey kuli, co i drugiego wycinka do swoiey także kuli; azatym te wycinki, tak się do siebie maią, iak i kule do których należą. Aże stósunek tych kul, iest stosunkiem tròymnożnym ich promieni, więc i stosunek tych wycinków iest także stosunkiem tròymnożnym tychże promieni.

Powtore. Ostrokręgi podobne utworzone obrotem Tròykątów, CBD, cbd, są do siebie w stosunku tróymnożnym promieni CB, cb; więc tak też maią się do siebie, iak i wycinki kul utworzone obrotem wycinków ACB, acb, do kół należących; a zatym i ròżnice każdego wycinka kuli, od każdego Ostrokręgu, to iest odcinki kul, utworzone przez półodcinki kòł, ABD, abd, są do siebie w stosunku równym stosunkowi wycinków kul, to iest w stosunku tròymnożnym promieni: CB, cb.

177. *Twierdz:* 11. Gdy cztery iakie linie czynią proporcyą, i gdy dwa pierwſze wyrazy tey proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, czyli podobnie położonemi, w dwóch Bryłach podobnych; a dwa oſtatnie wyrazy teyże proporcyi, ſą liniiami odpowiadaiącemi ſobie, w dwòch innych Bryłach podobnych; ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, będzie ròwny ſtoſunkowi dwòch brył drugich.

Dowodz. Gdyby te cztery liniie były bokami czterech Sześcianòw, te cztery Sześciany czyniłyby proporcyą; aże ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwóch pierwſzych Sześcianòw, a ſtoſunek dwòh drugich Brył, równa ſię ſtoſunkowi dwòch drugich Sześcianòw; więc i ſtoſunek dwòch pierwſzych Brył, ròwna ſię ſtoſunkowi dwòch Brył drugich.

178. *Uwaga.* Bryłowatości Brył podobnych, prędzey roſną, niż ich powierzchnie.

Przykład. Niech będą liniie odpowiadaiące ſobie w dwòch Bryłach podobnych, dwa razy większe iedne względem

dem drugich; powierzchnia iedney ztych Bryły, będzie cztery razy większa od powierzchni drugiey Bryły; a zaś Bryłowatość iedney Bryły, będzie ośm razy większa od bryłowatości, drugiey Bryły.

W ogulności zaś mówiąc, niech będą AB, AC, liniami odpowiadaiącemi sobie, w dwóch Bryłach podobnych. Zróbmy Tròykąt prostokątny maiący liniią AB, za iedno ramie kąta prostego, a liniią AC, za przeciwprostkątną. *Tab. VI. Fig. 5.*

Pociągniymy CD prostopadłą do AC, i natrafiaiącą na liniią AB przedłużoną, w punkcie D. Od tego punktu D, wyprowadźmy DE prostopadłą do AD, i natrafiaiącą na liniią AC przedłużoną, w punkcie E.

Powierzchnie dwóch Bryl, któreby miały AB, i AC za liniie odpowiadaiące sobie, maią się tak do siebie, iak liniie AB, i AD; a bryłowatości ich, są w tym samym stosunku, w którym liniie AB, i AE.

Aże liniia AE, większa iest względem linii AB, niżeli liniia AD; więc też i bry-

łowatość drugiey Bryły większa ieſt względem bryłowatości pierwſzey Bryły, niżeli powierzchnia tey drugiey Bryły, względem powierzchni pierwſzey Bryły; to ieſt: bryłowatość drugiey Bryły prędzey ſię powiękſza, niżeli iey powierzchnia.

179. *Uwaga.* Na poprzedzaiących Twierdzeniach zaſadza ſię podział *Linii Brył* (Linea Solidorum) który znayduiemy na cerklu proporcyonalnym.

Ta liniia zawiera w ſobie zwyczaynie 64, podziałów, które ſię rachować zaczynaią od *środka* narzędzia (à centro).

Odległości tego środka od punktów naznaczonych liczbami: 1. 8, 27, 64, tak ſię maią do ſiebie, iak
liczby 1, 2, 3, 4;
co znaczy, że Bryły podobne, których boki ſą w ſtoſunku liczb: 1, 2, 3, 4, maią bryłowatości w ſtoſunku liczb: 1, 8, 27, 64.

Jnne podziały wyznaczone ſą przez wyciągnienie przybliżone pierwiaſtków ſześciennych. J tak, ponieważ boki

dwòch

dwòch Sześcianòw, z ktòrych ieden dwa razy ieſt więkſzy od drugiego, tak ſię bliſko maią do ſiebie, iak liczby 126 i 100; więc też i odległości środka, od punktów naznaczonych na tey linii liczbami: 1, 2, tak ſię maią do ſiebie, iak liczby: 100, i 126. Używanie dwòch takich liniy, znayduiących ſię na dwoch ramionach cerkla proporcyonalnego, podobne ieſt używaniu innych liniy tamże ſię znayduiących, ktòre w oſobnym na to Rozdziale iuż ſię wyłożyło. w Części I.

KONIEC.



Tab. I.

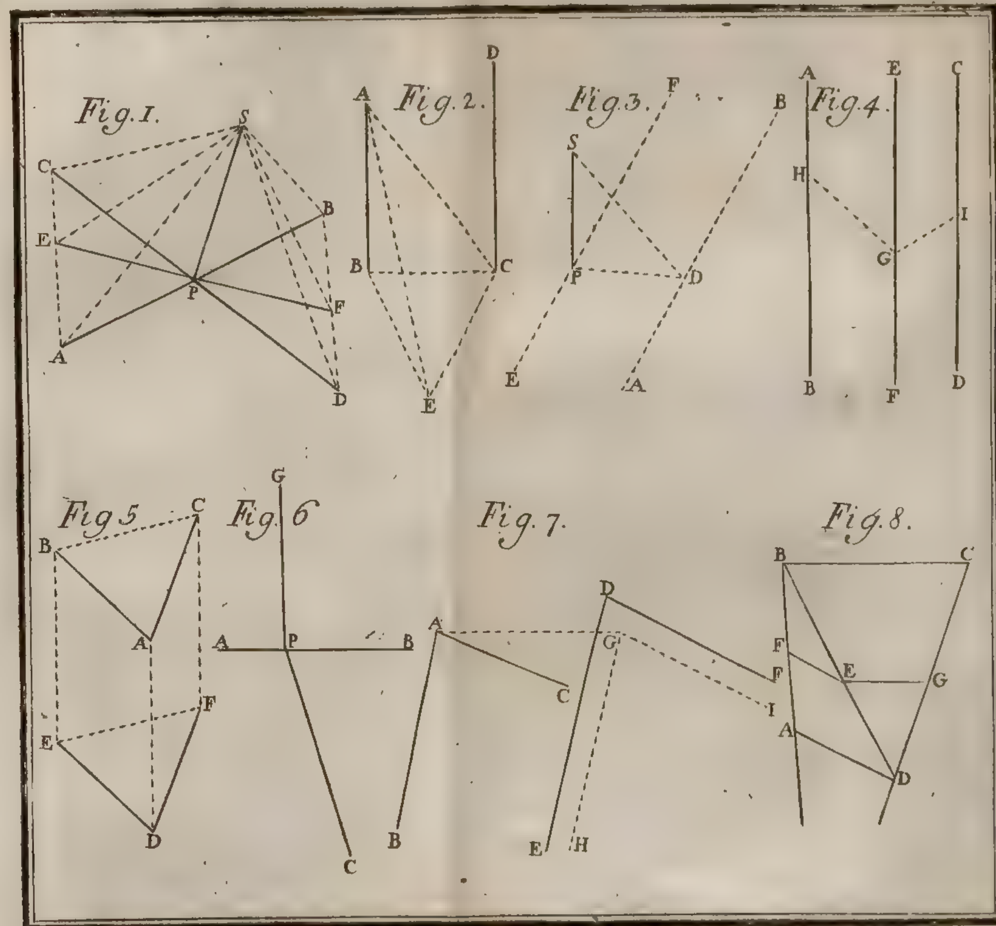
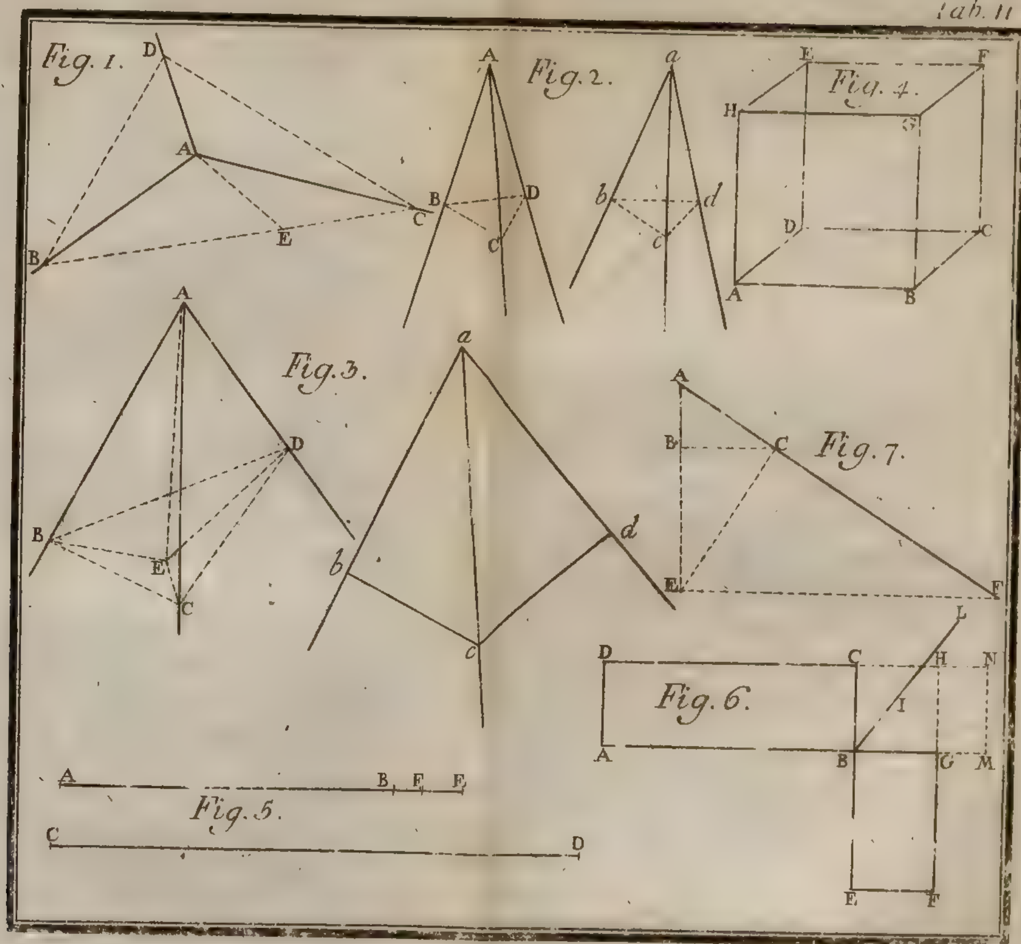


Fig. 1.
S
C
E
B
P
F
A
D
Fig. 2.
D
A
B
C
E
Fig. 3.
F
B
S
P
D
E
A
Fig. 4.
A
E
C
H
I
G
B
F
D
Fig 5
C
B
A
F
E
D
Fig. 6
G
A
P
B
C
Fig. 7.
D
A
G
C
F
I
B
E
H
Fig. 8.
B
C
F
E
G
A
D


Tab. II
Fig. 1.
D
A
B
E
C
Fig. 2.
A
B
D
C
a
b
d
c
Fig. 4.
E
F
H
G
D
C
A
B
Fig. 3.
A
D
B
E
C
a
b
d
c
Fig. 7.
A
B
C
E
F
Fig. 6.
D
C
H
N
L
I
A
B
G
M
E
F
Fig. 5.
A
B
F
E
C
D

Tab III

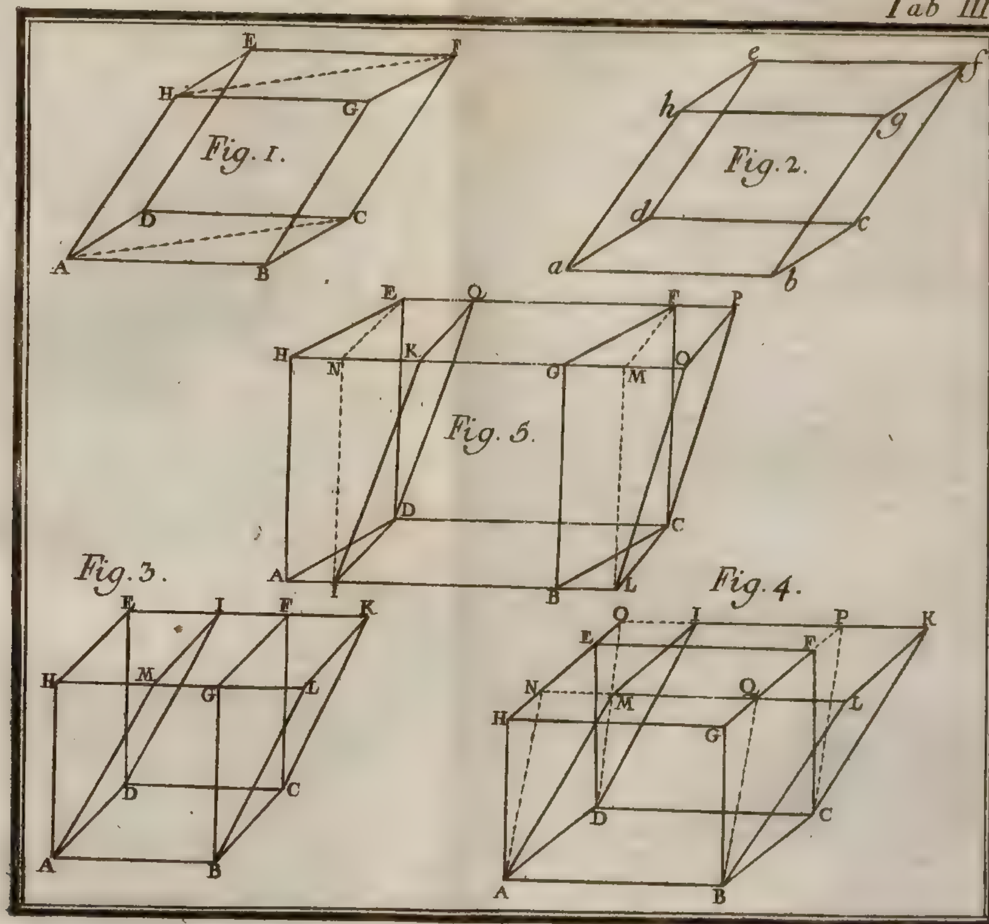
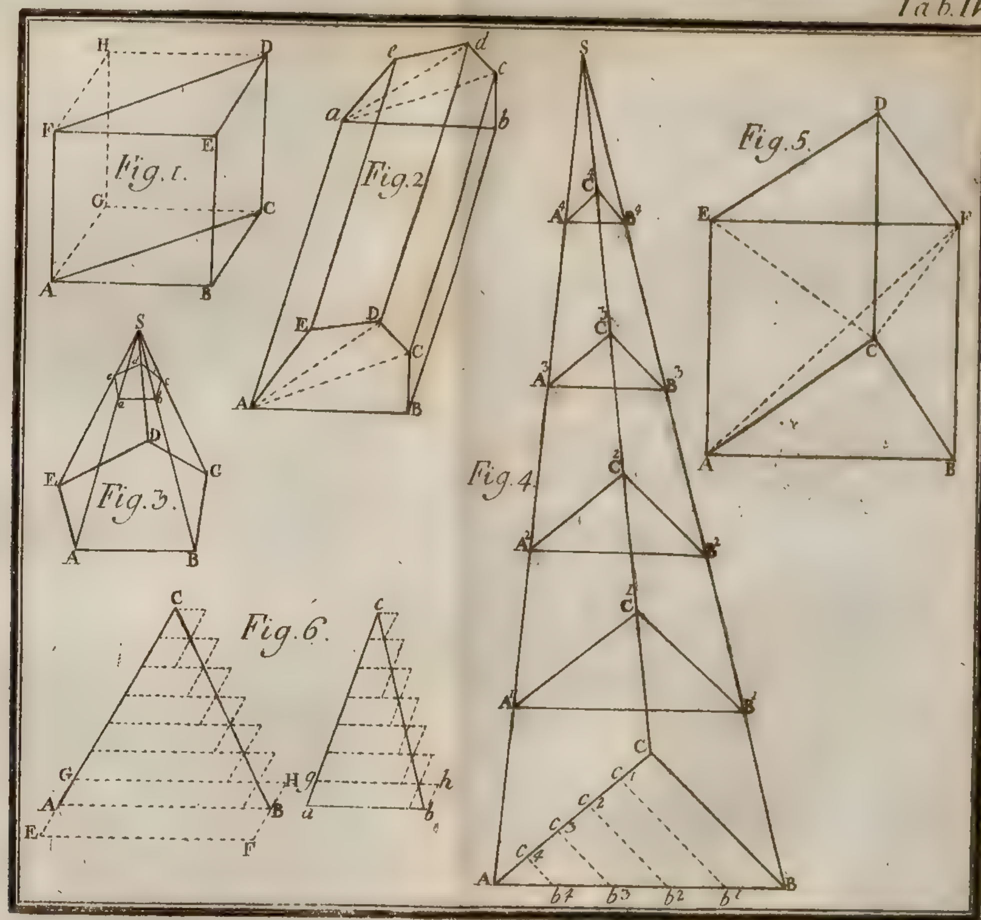
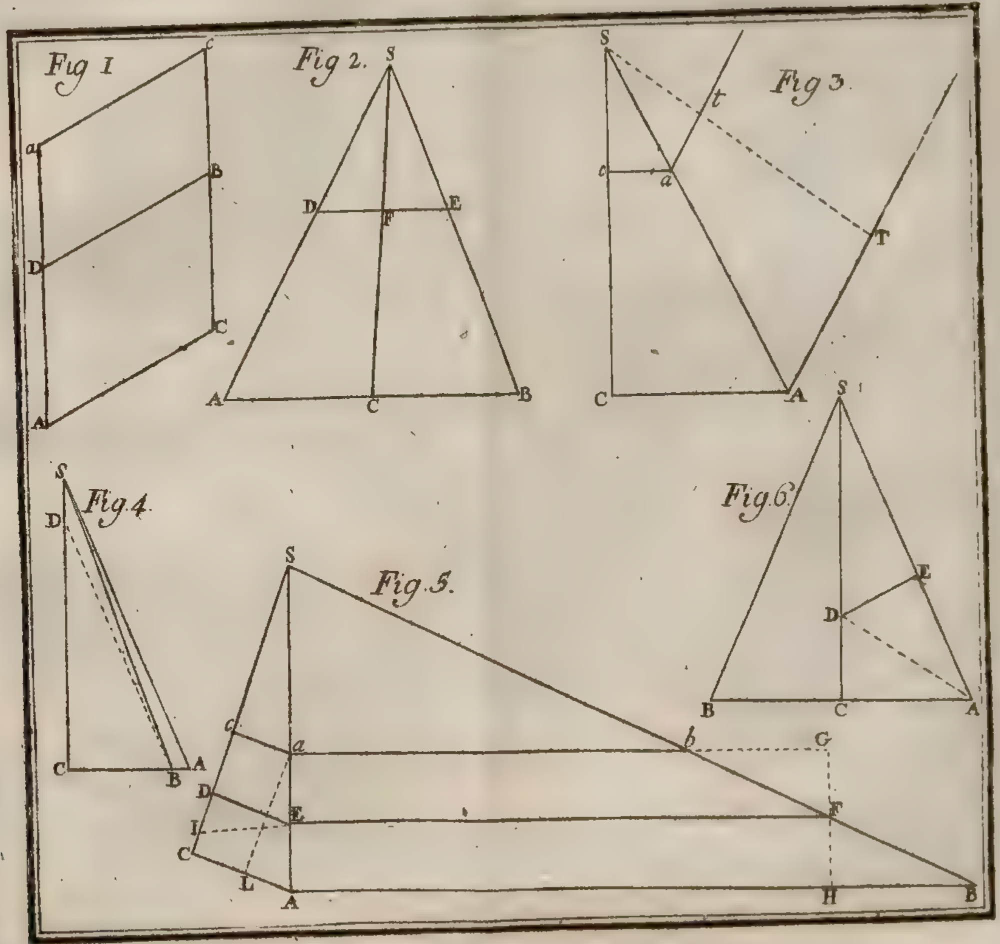


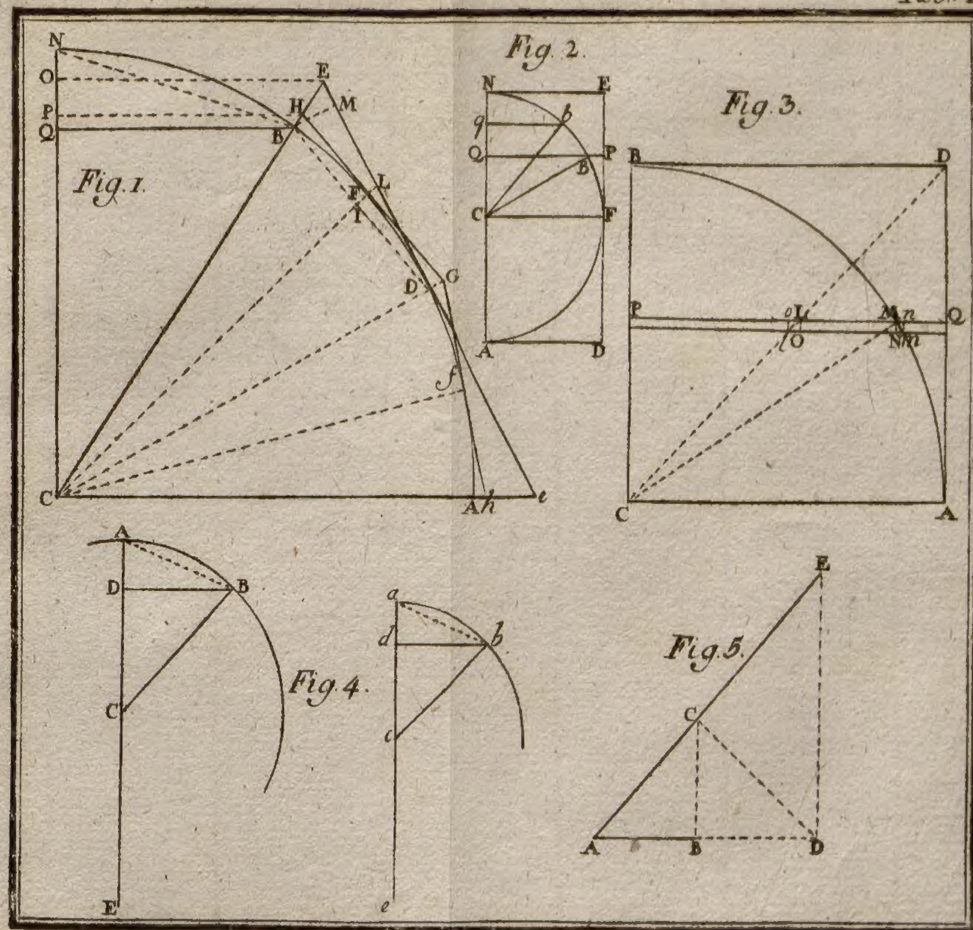
Fig. 1.
E
F
H
G
D
C
A
B
Fig. 2.
e
f
h
g
d
c
a
b
Fig. 5.
E
O
F
P
H
N
K
G
M
O
D
C
A
I
B
L
Fig. 3.
E
I
F
K
H
M
G
L
D
C
A
B
Fig. 4.
O
I
P
K
E
F
N
M
Q
L
H
G
D
C
A
B

Tab. IV.




Fig 1
Fig 2.
Fig 3.
Fig.4.
Fig.5.
Fig.6.
S
D
E
F
A
C
B
a
t
T
c
b
G
I
L
H

Tab.VI.


Fig.1.
N
O
P
Q
E
H
M
B
F
L
I
G
D
f
C
A
h
e
Fig. 2.
N
E
b
q
Q
P
B
C
F
A
D
Fig. 3.
B
D
P
o
L
O
M
n
Q
N
m
C
A
Fig. 4.
A
D
B
C
E
a
d
b
c
e
Fig. 5.
E
C
A
B
D

wary y ich gatunki wpiſać powinien. Powinien Piſarz należytą n
Szlakow attendencyą, y Strażnikow na nich będących, ażeby te w u
wicznym dozorze zoſtawały. Na Komorach ſrzednich powinien K
ty *ad Regnum* brane Wizować, y na nich Wizę *de die & An.* ſkonfr
towawſzy Towar na Wozie według nich podpiſywać. Na Kom
rach zaś Pogranicznych, przez ktore Towary iuż expedyowane *ex*
Regnum wychodzą, powinien Pan Piſarz porachowawſzy Paki, Balo
ſkrzynie &c. y one z Kwitem ſkonfrontowawſzy Kwit na Komor
zoſtawić, y zoſtawienie onego z wytknieniem Kupca y Towaru
Raptularzu zakonnotować, a ieżeliby ſię cokolwiek Towaru nad Kw
pokazało, powinien rozſądnie examinować, z iakiey to przyczy
czyli ten Towar po Expedycyi na tey Komorze
ny, w drodze do